

**Concursul interjudețean de matematică  
PRO-PERFORMANȚA  
2017-2018  
Ediția a III-a  
Clasa a V-a**

1. Considerăm că avem un număr nelimitat de pietricele albe (A) și negre (B) cu care formăm șiruri. (Spre exemplu există patru moduri diferite de a face șiruri de două pietricele: AA, AB, BA, BB.)

- i) Scrieți toate șirurile pe care le putem face cu trei pietricele. Câte sunt acestea?
- ii) Câte șiruri de cinci pietricele putem face? Dar de 100 de pietricele?

Acum presupunem că este interzis să alăturăm două pietricele negre. (Spre exemplu putem face trei șiruri de câte două pietricele AA, AB și BA, deoarece BB este interzis.)

- iii) Scrieți toate șirurile de trei pietricele pe care le putem face? Câte șiruri de patru pietricele putem face?

2. Trei echipe A, B și C joacă două meciuri fiecare. La victorie se acordă 3 puncte, la egal 1 punct, la înfrângere 0 puncte. Completați tabelul de mai jos, specificând apoi rezultatul din fiecare meci.

Echipa	Nr. jocuri	Victorii	Egaluri	Înfrângeri	Goluri marcate	Goluri primite	Puncte
A	2				5	3	3
B	2				2		1
C	2				3	2	4

3. Separați exact 2 litri de apă în fiecare din următoarele două cazuri:

- i) Dispuneți de două vase goale: unul de 4L și unul de 5L.
- ii) Dispundeți de două vase goale: unul de 3L și unul de 4L.

4. Găsiți cel mai mare număr natural  $\overline{abcd}$  care are proprietatea că  $\overline{(c+1)d} = 5 \cdot \overline{a(b-1)}$ .

(Gazeta Matematică)

Toate subiectele sunt obligatorii.  
Fiecare răspuns trebuie explicat.  
Timp de lucru două ore.

**SUCCES!**

**Concursul interjudețean de matematică  
PRO-PERFORMANȚA**

**2017-2018**

**Ediția a III-a**

**Clasa a VI-a**

1. Separați exact 2 litri de apă în fiecare din următoarele două cazuri:

- i) Dispuneți de două vase goale: unul de 4L și unul de 5L.
- ii) Dispundeți de două vase goale: unul de 3L și unul de 4L.

2. Considerăm că avem un număr nelimitat de pietricele albe (A) și negre (B), cu care formăm șiruri. (Spre exemplu există patru moduri diferite de a face șiruri de două pietricele AA, AB, BA, BB.)

- i) Scrieți toate șirurile pe care le putem face cu trei pietricele. Câte sunt acestea?
- ii) Câte șiruri de cinci pietricele putem face? Dar de 100 de pietricele?

Acum presupunem că este interzis să alăturăm două pietricele negre. (Spre exemplu putem face trei șiruri de câte două pietricele AA, AB și BA, deoarece BB este interzis.)

- iii) Scrieți toate șirurile de trei pietricele pe care le putem face în aceste condiții. Câte șiruri de patru pietricele putem face?

Fie  $r_N$  numărul de șiruri pe care le putem face cu N pietricele având condiția ca două pietricele negre să nu fie alăturate.

- iv) Arătați că  $r_{18} = r_{17} + r_{16}$

Hint: Considerați separate cazurile în care ultima pietricică e albă, respectiv când ultima pietricică e neagră.

3. Franța, Italia și România au participat la o competiție sportivă.

Să se afle câte medalii de aur, câte de argint și câte de bronz a câștigat fiecare dintre aceste trei țări, știind că:

- România a câștigat o medalie în plus de aur, dar cu trei mai puține de argint, față de Italia.
- Franța este singura cu cele mai multe medalii de bronz (18), dar singura cu cele mai puține de aur (7).
- Fiecare țară are cel puțin 6 medalii de fiecare fel.
- Italia are în total 27 de medalii.
- Italia are cu 2 mai multe medalii de bronz decât de aur.
- Cele 3 țări au în total 38 medalii de bronz.
- Franța are de două ori mai multe medalii de argint decât medaliile de aur ale Italiei.

4. Fie  $A = \{(x, y) / 7x + 3y = 2010, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ . Câte elemente are mulțimea A ?

*(Gazeta Matematică)*

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare răspuns trebuie explicat.*

*Timp de lucru două ore.*

**SUCCES!**

**Concursul interjudețean de matematică  
PRO-PERFORMANȚA  
2017-2018  
Ediția a III-a**

**Clasa a VII-a**

1. Considerăm că  $n$  persoane (care se cunosc între ele) stau în jurul unei mese rotunde. Fiecare persoană afirmă: „Ambele persoane din stânga și din dreapta mea sunt mincinoase sau ambele spun adevărul.” Cel puțin una dintre persoane este mincinoasă. Aflați ce valori poate lua  $n$ , știind că  $50 \leq n \leq 60$ .
2. Considerăm că avem un număr nelimitat de pietricele albe (A) și negre (B), cu care formăm șiruri. (Spre exemplu există patru moduri diferite de a face șiruri de două pietricele AA, AB, BA, BB.)
  - i) Scrieți toate șirurile pe care le putem face cu trei pietricele. Câte sunt acestea?
  - ii) Câte șiruri de cinci pietricele putem face? Dar de 100 de pietricele?

Acum presupunem că este interzis să alăturăm două pietricele negre. (Spre exemplu putem face trei șiruri de câte două pietricele AA, AB și BA, deoarece BB este interzis.)

- iii) Scrieți toate șirurile de trei pietricele pe care le putem face în aceste condiții. Câte șiruri de patru pietricele putem face?

Fie  $r_n$  numărul de șiruri pe care le putem face cu  $n$  pietricele având condiția ca două pietricele negre să nu fie alăturate.

iv) Arătați că  $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}, (\forall) n \geq 4$

Hint: Considerați separate cazurile în care ultima pietricică e albă, respectiv când ultima pietricică e neagră.

3. Cătălin se joacă împreună cu prietenii săi Andrei și Cristina mai multe jocuri. La fiecare joc, Cătălin alege două numere naturale  $x$  și  $y$ ,  $1 \leq x \leq y$ . Cătălin îi comunică lui Andrei suma  $x+y$ , iar Cristinei produsul  $xy$ , fără ca Andrei și Cristina să știe ce număr a fost spus celuilalt. Andrei și Cristina încearcă să găsească cele două numere, ei fiind persoane foarte inteligente.
  - i) La primul joc, Cristina spune imediat "Știu numerele  $x$  și  $y$ ". Ce putem noi spune despre numerele acestea? Explicați!
  - ii) La al doilea joc, Cristina spune: "Nu știu numerele". Andrei spune: "Știu numerele". Considerând că suma era 4, cât sunt numerele  $x$  și  $y$ ? Explicați!
  - iii) În al treilea joc, Cristina spune "Nu știu numerele". Andrei spune "Nu știu numerele". Cristina spune "Știu numerele". Știind că produsul era 4, aflați  $x$  și  $y$ . Explicați!
4. Determinați numerele prime  $p \leq q \leq r$  pentru care  $p^4 + q^4 + r^4 = 29811$ .

(Gazeta Matematică)

*Toate subiectele sunt obligatorii.  
Fiecare răspuns trebuie explicat.  
Timp de lucru două ore.*

**SUCCES!**

Concursul interjudețean de matematică  
PRO-PERFORMANȚA  
Ediția a III-a, noiembrie 2017  
Clasa a VIII-a

1. Ioana împlinește 7 ani. Colegii ei i-au adus un tort cu 7 lumânări "buclucașe" aprinse, așezate sub formă de cerc. Dacă Ioana suflă într-o lumânare, aceasta, precum și cele două de lângă ea își schimbă starea (dacă una dintre cele trei lumânări este aprinsă atunci se va stinge iar dacă este stinsă ea se va aprinde; dacă suflă într-o lumânare stinsă aceasta se aprinde!). Ioana are voie să sufle la fiecare *pas* doar într-o lumânare. Care este numărul minim de *pași* de care are nevoie pentru a stinge toate lumânările?
2. Pe patru monede identice ca formă sunt scrise numerele 1, 2, 3 și 4. Cele patru monede cântăresc un număr de grame egal cu numărul scris pe ele. Una dintre ele este falsă (cântărește mai mult sau mai puțin decât numărul scris pe ea). Să se arate că, folosind o balanță, se poate determina moneda falsă precum și dacă este mai grea sau mai ușoară decât greutatea scrisă pe ea prin două cântăriri.
3. Într-o cameră stau în jurul unei mese rotunde 25 de persoane, unele mint mereu iar altele spun mereu adevărul. Cele 25 de persoane se cunosc între ele. Un înțelept intră în cameră și vrea să afle care sunt cei care spun adevărul, deși nu cunoaște pe niciunul dintre cei 25. El cere fiecăruia să arate spre prima persoană aflată la masă în stânga sa și care spune adevărul. Înțeleptul observă că fiecare arată spre o altă persoană și că nu există o persoană spre care au arătat alte două persoane. El mai știe că există cel puțin o persoană care spune adevărul. Deși a analizat cu atenție toate răspunsurile, a constatat că nu poate ști cu certitudine nici măcar o persoană care spune adevărul sau care minte. După un moment de gândire înțeleptul afirmă că totuși știe numărul de persoane de la masă care spun adevărul. Care este acest număr? Justificați!
4. Într-un plan  $\alpha$  se consideră  $n$  puncte  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Fie  $M$  un punct exterior planului  $\alpha$ .
  - (a) Să se determine numărul minim de plane determinate de câte trei din cele  $n + 1$  puncte precum și situația în care se obține acest minim.
  - (b) Să se determine  $n$  astfel încât numărul maxim de plane determinate de câte trei din cele  $n + 1$  puncte este 16.
  - (c) Pentru  $n = 6$  să se decidă dacă există o situație în care numărul planelor determinate de câte trei din cele 7 puncte este exact 8. Justificare.

5. SUCCES!

Toate subiectele sunt obligatorii.  
Fiecare răspuns trebuie explicat.  
Timp de lucru 2 ore.

## Concursul interjudețean de matematică

### PRO-PERFORMANȚA

2017-2018

Ediția a III-a

Clasa a IX-a

1. Lumea este împărțită în două specii: oameni și roboți. Oamenii spun întotdeauna adevărul despre alți oameni și mint întotdeauna în legătură cu roboții. Roboții spun întotdeauna adevărul în legătură cu roboții și mint întotdeauna în legătură cu oamenii. Acest lucru este cunoscut de ambele specii.

**Atenție:** Omul nu face afirmații mincinoase pentru că vorbește cu un robot, ci dacă vorbește despre un robot. Analog pentru un robot. Prin persoană vom înțelege om sau robot).

- i) A spune: "B este robot". Precizați ce specie este A. Puteți spune ce este B? Explicați!
- ii) C spune: "D a spus că E este om". Ce putem spune despre fiecare dintre aceste trei persoane?
- iii) Considerăm că  $N$  persoane ( $N \geq 2$ ) stau în jurul unei mese circulare. Fiecare spune despre persoana vecină din dreapta sa "Tu minți în legătură cu persoana din dreapta ta". Ce putem spune despre  $N$ ? Ce putem spune despre cum sunt aranjate persoanele în jurul mesei? Explicați!
- iv)  $N$  persoane sunt aranjate în jurul unei mese ( $N \geq 2$ ). Fiecare spune vecinului din dreapta "Vecinul tău din dreapta minte în legătură cu vecinul său din dreapta". Ce putem spune despre  $N$  și despre aranjarea persoanelor în jurul mesei?

2. Cătălin se joacă împreună cu prietenii săi Andrei și Cristina mai multe jocuri. La fiecare joc, Cătălin alege două numere naturale  $x$  și  $y$ ,  $1 \leq x \leq y$ . Cătălin îi comunică lui Andrei suma  $x+y$ , iar Cristinei produsul  $xy$ , fără ca Andrei și Cristina să știe ce număr a fost spus celuilalt. Andrei și Cristina încearcă să găsească cele două numere, ei fiind persoane foarte inteligente.

- i) La primul joc, Cristina spune imediat "Știu numerele  $x$  și  $y$ ". Ce putem noi spune despre numerele acestea? Explicați!
- ii) La al doilea joc, Cristina spune: "Nu știu numerele". Andrei spune: "Știu numerele". Considerând că suma era 4, cât sunt numerele  $x$  și  $y$ ? Explicați!
- iii) În al treilea joc, Cristina spune "Nu știu numerele". Andrei spune "Nu știu numerele". Cristina spune "Știu numerele". Știind că produsul era 4, aflați  $x$  și  $y$ . Explicați!
- iv) În al patrulea joc, Cristina spune: "Nu știu numerele". Andrei spune "Știam că nu știu numerele". Cristina spune "Acum le știu". Știind că produsul este 8, cât sunt numerele  $x$  și  $y$ ? Explicați!

3. Alice și Bob au la dispoziție o tablă de șah specială de forma unui tablou cu  $n$  linii și  $m$  coloane ( $n$  și  $m$  numere naturale nenule) și un pion. Cei doi joacă următorul joc:
- Inițial Alice poate alege dacă ea efectuează prima mutare sau nu;
  - Prima mutare constă în plasarea pionului pe una din căsuțele tablei de șah (jucătorul aflat la prima mutare are dreptul de a așeza pionul în orice poziție);
  - Începând cu a doua mutare, jucătorii mută alternativ pionul în una din căsuțele adiacente poziției curente, cu condiția ca pionul să nu se mai fi aflat în căsuța respectivă până atunci (doua căsuțe se numesc adiacente dacă au o latură comună);
  - Pierde jucătorul care nu mai poate muta.

Are Alice întotdeauna strategie de câștig? Justificați!

**Observație:** Prima și a doua mutare sunt efectuate de jucători diferiți

4. Considerăm sistemul  $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ .
- a) Știind că  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , să se arate că  $x + y + z = 1$
  - b) Să se rezolve sistemul în mulțimea  $[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)$
  - c) Să se determine o soluție în mulțimea  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ .

(Gazeta Matematică)

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare răspuns trebuie explicat.*

*Timp de lucru două ore.*

**SUCCES!**

**Concursul interjudețean de matematică  
PRO-PERFORMANȚA**

**2017-2018**

**Ediția a III-a**

**Clasa a X-a**

1. Considerăm o tablă de șah de dimensiune  $2^n \times 2^n$ ,  $n$  număr natural nenul. Dându-se o căsuță oarecare aflată pe linia  $x$  ( $1 \leq x \leq 2^n$ ) și coloana  $y$  ( $1 \leq y \leq 2^n$ ), să se arate că această tablă de șah poate fi acoperită întotdeauna cu piese de forma celei din figura alăturată, astfel încât căsuța dată să nu fie acoperită de nicio piesă, iar orice altă căsuță să fie acoperită de exact o piesă. Caz particular:  $n = 3$ .

**Observație:** orice piesa poate fi rotită cu orice multiplu de  $90^\circ$ .



2. Lumea este împărțită în două specii: oameni și roboți. Oamenii spun întotdeauna adevărul despre alți oameni și mint întotdeauna în legătură cu roboții. Roboții spun întotdeauna adevărul în legătură cu roboții și mint întotdeauna în legătură cu oamenii. Acest lucru este cunoscut de ambele specii.

**Atenție:** Omul nu face afirmații mincinoase pentru că vorbește cu un robot, ci dacă vorbește despre un robot. Analog pentru un robot. Prin persoană vom înțelege om sau robot).

- i) A spune: "B este robot". Precizați ce specie este A. Puteți spune ce este B? Explicați!
- ii) C spune: "D a spus că E este om". Ce putem spune despre fiecare dintre aceste trei persoane?
- iii) Considerăm că  $N$  persoane ( $N \geq 2$ ) stau în jurul unei mese circulare. Fiecare spune despre persoana vecină din dreapta sa "Tu minți în legătură cu persoana din dreapta ta". Ce putem spune despre  $N$ ? Ce putem spune despre cum sunt aranjate persoanele în jurul mesei? Explicați!
- iv)  $N$  persoane sunt aranjate în jurul unei mese ( $N \geq 2$ ). Fiecare spune vecinului din dreapta "Vecinul tău din dreapta minte în legătură cu vecinul său din dreapta". Ce putem spune despre  $N$  și despre aranjarea persoanelor în jurul mesei?

3. Avem șase bile, colorate astfel: două bile roșii, două bile verzi și două bile galbene.

Din fiecare culoare, o bilă este grea și una este ușoară, adică au greutate diferite. Bilele grele au aceeași greutate, bilele ușoare au aceeași greutate.

Folosind o balanță, identificați cele trei bile grele din două cântăriri.

4. Există numere prime distincte  $p, q, r$  astfel încât  $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$  sunt termeni ai unei progresii aritmetice?

*(Gazeta matematică)*

*Toate subiectele sunt obligatorii.  
Fiecare răspuns trebuie explicat.  
Timp de lucru două ore.*

**SUCCES!**



**Concursul interjudețean de matematică  
PRO-PERFORMANȚA  
2017-2018  
Ediția a III-a  
Clasa a XI-a**

1. Considerăm o tablă de șah de dimensiune  $2^n \times 2^n$ ,  $n$  număr natural nenul. Dându-se o căsuță oarecare aflată la linia  $x$  ( $1 \leq x \leq 2^n$ ) și coloana  $y$  ( $1 \leq y \leq 2^n$ ), să se arate că această tablă de șah poate fi acoperită întotdeauna cu piese de forma celei din figura alăturată, astfel încât căsuța dată să nu fie acoperită de nicio piesă, iar orice altă căsuță să fie acoperită de exact o piesă. Caz particular:  $n = 3$ .

**Observație:** orice piesa poate fi rotită cu orice multiplu de  $90^\circ$ .



2. Alice și Bob au la dispoziție o tablă de șah specială de forma unei matrici cu  $n$  linii și  $m$  coloane ( $n$  și  $m$  numere naturale nenule) și un pion. Cei doi joacă următorul joc:
- Inițial Alice poate alege dacă ea efectuează prima mutare sau nu
  - Prima mutare constă în plasarea pionului pe una din căsuțele tablei de șah (jucătorul aflat la prima mutare are dreptul de a așeza pionul în orice poziție)
  - Începând cu a doua mutare, jucătorii mută alternativ pionul în una din căsuțele adiacente poziției curente, cu condiția ca pionul să nu se mai fi aflat în căsuța respectivă până atunci (doua căsuțe se numesc adiacente dacă au o latură comună)
  - Pierde jucătorul care nu mai poate muta

Are Alice întotdeauna strategie de câștig? Justificați!

**Observație:** Prima și a doua mutare sunt efectuate de jucători diferiți.

3. O țară are exact  $N > 1$  orașe și șosele care conectează unele orașe (o șosea conectează două orașe distincte). Știm că putem ajunge din orice oraș în orice alt oraș într-un mod unic, mergând pe șosele, astfel încât nicio șosea să nu fie parcursă mai mult de o dată.
- a) Demonstrați că există un oraș cu o singură șosea adiacentă. Arătați în plus că există cel puțin două astfel de orașe.
  - b) Câte șosele se află în oraș?

c) O șosea a fost închisă pentru reparații. Se mai poate ajunge din orice oraș în oricare altul?

4. Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:

$$x_1 = 2, x_{n+1} = 2^{\frac{x_n}{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n, \lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1).$$

(Gazeta Matematică)

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare răspuns trebuie explicat.*

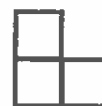
*Timp de lucru două ore.*

**SUCCES!**

**Concursul interjudețean de matematică**  
**PRO-PERFORMANȚA**  
**2017-2018**  
**Ediția a III-a**  
  
**Clasa a XII-a**

1. Considerăm o tablă de șah de dimensiune  $2^n \times 2^n$ ,  $n$  număr natural. Dându-se o căsuță oarecare aflată la linia  $x$  ( $1 \leq x \leq 2^n$ ) și coloana  $y$  ( $1 \leq y \leq 2^n$ ), să se arate că această tablă de șah poate fi acoperită întotdeauna cu piese de forma celei din figura alăturată, astfel încât căsuța dată să nu fie acoperită de nicio piesă, iar orice altă căsuță să fie acoperită de exact o piesă. Caz particular:  $n = 3$ .

**Observație:** orice piesa poate fi rotită cu orice multiplu de  $90^\circ$ .



2. Alice și Bob au la dispoziție o tablă de șah specială de forma unei matrici cu  $n$  linii și  $m$  coloane ( $n$  și  $m$  numere naturale nenule) și un pion. Cei doi joacă următorul joc:
- Inițial Alice poate alege dacă ea efectuează prima mutare sau nu
  - Prima mutare constă în plasarea pionului pe una din căsuțele tablei de șah (jucătorul aflat la prima mutare are dreptul de a așeza pionul în orice poziție)
  - Începând cu a doua mutare, jucătorii mută alternativ pionul în una din căsuțele adiacente poziției curente, cu condiția ca pionul să nu se mai fi aflat în căsuța respectivă până atunci (doua căsuțe se numesc adiacente dacă au o latură comună)
  - Pierde jucătorul care nu mai poate muta

Are Alice întotdeauna strategie de câștig? Justificați!

**Observație:** Prima și a doua mutare sunt efectuate de jucători diferiți.

3. O țară are exact  $N > 1$  orașe și șosele care conectează unele orașe (o șosea conectează două orașe distincte). Știm că putem ajunge din orice oraș în orice alt oraș într-un mod unic, mergând pe șosele, astfel încât nicio șosea să nu fie parcursă mai mult de o dată.
- a) Demonstrați că există un oraș cu o singură șosea adiacentă. Arătați în plus că există cel puțin două astfel de orașe.
  - b) Câte șosele se află în oraș?
  - c) O șosea a fost închisă pentru reparații. Se mai poate ajunge din orice oraș în oricare altul?

4. Să se determine funcțiile derivabile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f'(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$  și  $f(x) = f(\sin x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

(Gazeta Matematică)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

Timp de lucru două ore.

**SUCCES!**