

**Concursul interjudețean de matematică**  
**Cupa PRO-PERFORMANȚA**  
**2017-2018**  
**Ediția a III-a**

**Juniori II (Clasele V-VI)**

1. Avem un vas care conține 24 de litri de apă. Avem de asemenea trei vase goale: unul de 5 litri, unul de 11 litri și unul de 13 litri. Cum putem împărți cei 24 litri de lichid în trei părți egale, astfel încât să avem trei vase care conțin 8 litri fiecare?
  
2.
  - i) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor 8?  
Fie  $n < 10$ ,  $n$  număr natural nenul.
  
  - ii) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor  $n$ ?
  - iii) Câte numere naturale mai mici decât 1000 au suma cifrelor  $n$ ?
  - iv) Câte numere naturale mai mari decât 500 și mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8?
  
3. Șase persoane, **A**, **B**, **C**, **D**, **E** și **F** decid să concureze într-un turneu de tenis. Fiecare concurent va juca cu fiecare dintre ceilalți. Orice meci se încheie cu victoria unui concurent și înfrângerea celuilalt. Știm următoarele:
  - Niciun concurent nu și-a pierdut toate meciurile, dar unul singur le-a câștigat pe toate.
  - **D** a câștigat meciul cu **B**.
  - **A** și **E** au câștigat același număr de meciuri, acel număr fiind impar, dar **A** a pierdut în meciul cu **E**.
  - **B** și **F** au câștigat în total 7 meciuri.
  - **C** a câștigat un singur joc, împotriva unicei persoane dintre celelalte 5 care a câștigat de asemenea un singur meci.

Puteți deduce toate rezultatele?

*Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare răspuns trebuie explicat. Timp de lucru două ore.*

- **SUCCES!**

**Concursul interjudețean de matematică  
Cupa PRO-PERFORMANȚA  
2017-2018  
Ediția a III-a**

**Juniori I (Clasele VII-VIII)**

1.

i) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor 8?

Fie  $n < 10$ ,  $n$  număr natural nenul.

ii) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor  $n$ ?

iii) Câte numere naturale mai mici decât 1000 au suma cifrelor  $n$ ?

iv) Câte numere naturale mai mari decât 500 și mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8?

v) Câte numere mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8 și cel puțin o cifră egală cu 5?

vi) Care este suma tuturor sumelor cifrelor numerelor de la 0 la 999 inclusiv?

2. Șase persoane,  $A, B, C, D, E$  și  $F$  decid să concureze într-un turneu de tenis. Fiecare concurent va juca cu fiecare dintre ceilalți. Orice meci se încheie cu victoria unui concurent și înfrângerea celuilalt. Știm următoarele:

- Niciun concurent nu și-a pierdut toate meciurile, dar unul singur le-a câștigat pe toate.
- $D$  a câștigat meciul cu  $B$ .
- $A$  și  $E$  au câștigat același număr de meciuri, acel număr fiind impar, dar  $A$  a pierdut în meciul cu  $E$ .
- $B$  și  $F$  au câștigat în total 7 meciuri.
- $C$  a câștigat un singur joc, împotriva unicei persoane dintre celelalte 5 care a câștigat de asemenea un singur meci.

Puteți deduce toate rezultatele?

3. Ana și Crina dispută un joc. Ele aleg pe rând un număr din mulțimea  $\{0, 1, 2\}$ , Ana fiind prima la mutare. La fiecare mutare (cu excepția Anei când face prima mutare), jucătorul nu alege același număr care tocmai a fost ales de celălalt.

În prima versiune a jocului, Crina câștigă, după ce a mutat, dacă suma numerelor jucate până atunci este multiplu de 3. De exemplu, Crina câștigă după mutările:  $(2, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 0)$  deoarece suma numerelor este 6. Ana câștigă dacă Crina nu învinge în 5 runde. Spre exemplu Ana câștigă după  $(2, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 2)$ .

i) Arătați că dacă prima mutare a Anei este 1 sau 2, Crina câștigă imediat.

**Concursul interjudețean de matematică  
Cupa PRO-PERFORMANȚA  
2017-2018  
Ediția a III-a**

**Seniori (Clasele IX-XII)**

1. Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor 8?

Fie  $n < 10$ ,  $n$  număr natural nenul.

- a) Câte numere naturale mai mici decât 100 au suma cifrelor  $n$ ?
- b) Câte numere naturale mai mici decât 1000 au suma cifrelor  $n$ ?
- c) Câte numere naturale mai mari decât 500 și mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8?
- d) Câte numere mai mici decât 1000 au suma cifrelor 8 și cel puțin o cifră egală cu 5?
- e) Care este suma tuturor sumelor cifrelor numerelor de la 0 la 999 inclusiv?

2. Se dă un segment de lungime 1. Se aleg aleator două puncte din interiorul acestui segment. Prin tăieturi aplicate în aceste puncte obținem 3 noi segmente. Care este probabilitatea ca acele 3 segmente să poată forma un triunghi?

3. Sunteți un comandat al unei divizii antitanc din al Doilea Război Mondial. Armata inamica deține un număr oarecare de tancuri (necunoscut). Câmpul de bătalie poate fi reprezentat ca un șir de  $n$  pătrate de latura 1 unitate ( $n > 1$ ) dispuse pe o dreaptă orizontală. Numim vecin al unui astfel de pătrat, un alt pătrat din șir cu proprietatea că cele două au o latură comună (toate pătratele au exact 2 vecini cu excepția primului și ultimului, care au câte unul). Știți că orice pătrat poate conține oricâte tancuri (posibil 0), iar scopul dumneavoastră este distrugerea tuturor tancurilor, ținând cont de următoarele observații:

- Puteți ordona tragerea în unul din cele  $n$  pătrate, astfel lovind o dată fiecare din tancurile care se află în acel pătrat
- Dacă un tanc este lovit pentru prima oară, se va muta în unul din pătratele vecine pătratului în care s-a aflat până acum
- Dacă un tanc este lovit a doua oară, va fi distrus

**Observație:** Tancurile dintr-un pătrat, lovite pentru prima oară, se vor muta independent în unul dintre vecinii pătratului. Cu alte cuvinte, nu este obligatoriu ca toate să se mute în același vecin.

Determinați o strategie cu număr minim de ordine de tragere, astfel încât la final să fie garantat că nu mai există niciun tanc, indiferent de numărul și așezarea acestora la început.

*Toate subiectele sunt obligatorii.  
Fiecare răspuns trebuie explicat.  
Timp de lucru două ore.*

**SUCCEȘ!**