Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Barem clasa a V-a

1. i) AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB....................1p

Sunt 8 siruri...1p

ii) 2^5 = 32 de siruri..1p

2^{100} siruri..1p

iii) AAA, AAB, ABA, BAA, BAB,...1p

Excludem pe cele cu 4 B-uri, pe cele cu 3 B-uri si raman:

-cele cu 2 B-uri: ABAB, BAAB, BABA

-cele cu 1 B: AAAB, AABA, ABAA, BAAA

-fara B: AAAA

Raspuns: 8 siruri posibile..2p

2.

Echipa	Nr. jocuri	Victorii	Egaluri	Înfrângeri	Goluri marcate	Goluri primite	Puncte
A	**2**	**1**	**0**	**1**	**5**	**3**	**3**
B	**2**	**0**	**1**	**1**	**2**	**5**	**1**
C	**2**	**1**	**1**	**0**	**3**	**2**	**4**

A-B : (4, 1) -victorie pentru A

B-C: (1, 1)- egal

C-A: (2, 1)-victorie pentru C

Completare tabel..3p

Scoruri exacte..4p

3.

i)..4p

Vas 4L	Vas 5L
0	5
4	1
0	1
1	0
1	5
4	2

ii)..3p

Vas 3L	Vas 4L
0	4
3	1
0	1
1	0
1	4
3	2

Pentru solutii incomplete puncte in functie de numarul de pasi omisi!

4. Dacă $\overline{a(b-1)} \geq 20$,atunci $5 \cdot \overline{a(b-1)} \geq 100$, imposibil pt că numărul $\overline{(c+1)d}$ are 2 cifre, deci a =1..3p

Dacă $\overline{abcd}$ este cel mai mare, atunci b este cel mai mare posibil, deci $b=9$ 1p

Deci $\overline{(c+1)d}=5\cdot 18 \Rightarrow \overline{(c+1)d}=90 \Rightarrow d=0$ și $c+1=9 \Rightarrow c=8$ 2p

Numărul căutat este 1980..1p

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Barem clasa a VI-a

1.

i)..4p

Vas 4L	Vas 5L
0	5
4	1
0	1
1	0
1	5
4	2

ii)..3p

Vas 3L	Vas 4L
0	4
3	1
0	1
1	0
1	4
3	2

2. i) AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB....................1p

Sunt 8 siruri...1p

ii) 2^5 = 32 de siruri...1p

2^{100} siruri..1p

iii) AAA, AAB, ABA, BAA, BAB,..1p

Excludem pe cele cu 4 B-uri, pe cele cu 3 B-uri si raman:

-cele cu 2 B-uri: ABAB, BAAB, BABA

-cele cu 1 B: AAAB, AABA, ABAA, BAAA

-fara B: AAAA

Raspuns: 8 siruri posibile..1p

iv) Un sir de 18 pietricele, daca se termina in A, atunci primele 17 pietricele pot fi aranjate in exact r_{17} moduri, in timp ce daca se termina in N, atunci obligatoriu penultima este A, iar celelalte 16 vor fi asadar pozitionate in r_{16} moduri, de unde concluzia...1p

3. Din informatiile date rezulta urmatorul tabel:.........................2p

	Aur	Argint	Bronz
Franta	7	2x	18
Italia	x	y	x+2
Romania	x+1	y-3	18-x

Stim ca Italia are 27 de medalii, deci 2x+y=25, de unde y impar.......1p

Franta are cele mai putine de aur si cele mai putine de bronz, deci x>7 si 18>x+2, de unde 7<x<16, deci 2x>15, de unde y<10. (1)......1p

Romania are y-3 medalii de argint, deci y-3>5, deci y>8. (2)........1p

Din (1) si (2) rezulta y=9, deci x=8. Deci tabelul devine:

	Aur	Argint	Bronz
Franta	7	16	18
Italia	8	9	10
Romania	9	6	10

Tabelul final..2p

4. Din relația dată $\Rightarrow y = 670 - \frac{7x}{3}$. Cum $y \in \mathbb{N}$ și $(3,7)=1$, rezultă...................................3p

Deci $y = 670 - 7k$, cu $k \in \mathbb{N}$. Dar $y \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq 95$, $k \in \mathbb{N}$. Deci k poate lua 96 de valori 3p

În concluzie, mulțimea A are 96 de elemente...1p

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Barem clasa a VII-a

1. Consideram o numerotare a persoanelor de la 1 la n. Fara a restrange generalitatea, consideram ca al 2-lea minte, deci dintre cei doi vecini ai sai, unul e mincinos (sa zicem primul), celalat spune adevarul (al treilea)..1p

Daca primul este mincinos, ultimul spune adevarul...1p

Daca al treilea spune adevarul, al patrulea este mincinos..1p

Al 5-lea mincinos, al 6-lea spune adevarul...1p

Avem deci grupuri M-M-A, ultimul din sir fiind A, sirul se termina in M-M-A............................1p

Deci n este multiplu de 3, asadar n poate fi 51, 54, 57, 60..2p

2. i) AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB....................1p

Sunt 8 siruri...1p

ii) 2^5 = 32 de siruri..1p

2^{100} siruri..1p

iii) AAA, AAB, ABA, BAA, BAB,..1p

Excludem pe cele cu 4 B-uri, pe cele cu 3 B-uri si raman:

-cele cu 2 B-uri: ABAB, BAAB, BABA

-cele cu 1 B: AAAB, AABA, ABAA, BAAA

-fara B: AAAA

Raspuns: 8 siruri posibile...1p

iv) Un sir de n pietricele, daca se termina in A, atunci primele n-1 pietricele pot fi aranjate in exact r_{n-1} moduri, in timp ce daca se termina in N, atunci obligatriu penultima este A, iar celelalte 16 vor fi asadar pozitionate in r_{n-2} moduri, de unde concluzia...1p

3.

i) x=1, y=1 sau număr prim...2p

ii) Din suma lor este 4 deducem ca numerele sunt 1, 3 sau 2, 2 (acest lucru l-a dedus si Andrei). Daca erau 1, 3, Cristina ar fi stiut, deci numerle sunt 2 si 2...3p

iii) Cristina vazand ca produsul este 4, isi da seama ca Andrei are 1+4=5 sau 2+2=4. Insa daca Andrei avea 4, conform ii) atunci Andrei ar fi stiut numerele. Andrei spunand “Nu stiu!”, Cristina deduce ca Andrei are 5, deci numerele sunt 1 si 4...2p

4.

Deoarece numărul 29811 este impar, rezultă că cele trei numere sunt fie toate trei impare, fie doar unul este impar.. ....1p

Dacă un singur număr este impar, atunci $p=q=2$ și ecuația $r^4=29779$ nu are soluție...1p

Dacă toate sunt impare, atunci ultima lor cifră este 1,3,5,7 sau 9. Dacă $u(x)\in\{1,3,7,9\}\Rightarrow u(x^4)=1$, iar dacă $u(x)=5\Rightarrow u(x^4)=5$ (am notat $u(x)=$ ultima cifră a numărului x).....................................2p

Cum $u(29811)=1$, două dintre numerele căutate au ultima cifră 5 și sunt prime, deci $p=q=5$...2p

Deci $r^4=28.561\Rightarrow r=13$...1p

Concursul interjudeţean de matematică
PRO-PERFORMANŢA
Ediţia a III-a, noiembrie 2017
Clasa a VIII-a (barem)

1. Dacă se suflă de două ori într-o lumânare efectul asupra ei şi asupra celor două lumânări vecine este acelaşi ca şi când nu s-ar fi suflat, iar dacă se suflă de trei ori efectul este ca şi când s-ar fi suflat o singură dată. Rezultă că este inutil să se sufle mai mult de o dată într-o lumânare şi deci numărul minim de paşi este mai mic sau egal decât 7 .... (1p)

   Dacă se suflă (pe rând sau în orice ordine) în toate cele 7 lumânări o singură dată, fiecare dintre ele îşi va schimba starea de trei ori şi după cei 7 paşi vor fi toate stinse .... (3p)

   Arătăm că numărul minim de paşi este 7.

   Este clar că nu se pot stinge toate lumânările în unul sau doi paşi pentru că va exista cel puţin o lumânare care nu are cum să-şi schimbe starea .... (1p)

   Notăm cu " $+$ " o lumânare în care se suflă şi cu " $-$ " o lumânare în care nu se suflă. În celelalte cazuri va exista cel puţin o configuraţie de tipul " $++-$ " sau " $-+-$ ". În ambele configuraţii lumânarea din mijloc îşi va schimba starea de două ori şi deci la final va fi aprinsă .... (2p)

   Se pot invoca şi motive de paritate. La fiecare pas paritatea numărului de lumânări aprinse se schimbă. La început acesta este impar iar la sfârşit este par şi deci nu putem avea un număr par de paşi.

2. La prima cântărire punem pe un taler al balanţei monedele 1 şi 2 iar pe celălalt moneda 3 iar la a doua cântărire punem pe un taler al balanţei monedele 1 şi 3 iar pe celălalt moneda 4.... (2p)

   Dacă $1+2=3$ atunci moneda falsă este 4 şi după cum $1+3>4$ sau $1+3<4$ moneda 4 este mai uşoară sau mai grea decât scrie pe ea .... (1p)

   Dacă $1+3=4$ atunci moneda falsă este 2 şi după cum $1+2<3$ sau $1+2>3$ moneda 2 este mai uşoară sau mai grea decât scrie pe ea .... (1p)

   Dacă $1+2>3$ şi $1+3>4$ sau $1+2<3$ şi $1+3<4$ atunci moneda falsă este 1 pentru că este comună celor două cântariri şi înclină în acelaşi fel talerul balanţei pe care se află (spre deosebire de moneda 3). În primul caz moneda 1 cântăreşte mai mult de un gram iar în al doilea caz mai puţin de un gram .... (2p sau 1p)

   Dacă $1+2>3$ şi $1+3<4$ sau $1+2<3$ şi $1+3>4$ atunci moneda falsă este 3 pentru că este comună celor două cântariri şi înclină în acelaşi fel talerul balanţei pe care se află (spre deosebire de moneda 1). În primul caz moneda 3 cântăreşte mai puţin de trei grame iar în al doilea caz mai mult de trei grame .... (1p sau 2p)

   Semnul de egalitate din relaţii înseamnă că balanţa este în echilibru iar semnul de inegalitate $>$ ($<$) înseamnă că monedele din stânga cântăresc mai mult (mai puţin).

3. Identificăm cele 25 de persoane ce stau în jurul mesei cu 25 de puncte aflate pe un cerc. Când o persoană arată spre o alta unim cele două puncte corespunzătoare. .... (1p)

   Deoarece există cel puţin o persoană care spune adevărul rezultă că există un poligon convex înscris în cerc având vârfurile corespunzătoare tuturor celor care spun adevărul .... (2p)

   Orice punct de pe cerc este vârf al unui poligon înscris în cerc .... (1p)

   Toate poligoanele sunt convexe alfel, înţeleptul şi-ar da seama că persoanele corespunzătoare vârfurilor unui poligon neconvex (o linie frântă închisă cu autointersecţii) sunt (toate) mincinoase .... (1p)

   Deoarece înţeleptul şi-a dat seama câte persoane spun adevărul înseamna că toate poligoanele (în număr de n) au acelaşi număr de vârfuri (în număr de m). .... (1p)

În final $n \cdot m = 25$ şi deci $m = 5$. Cazul $m = 25$ şi $n = 1$ ar atrage faptul că toate persoanele ar spune adevărul .... (1p)

4. (a) Numărul minim este 1. Acest lucru se realizează dacă cele n puncte din planul α sunt coliniare .... (1p)

   (b) Maximul numărului de plane se realizează dacă oricare trei dintre punctele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nu sunt coliniare .... (1p)

   Numărul dreptelor determinate de oricare două puncte dintre $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ .... (1p)

   Numărul maxim de plane determinate de câte trei din cele $n+1$ puncte este $\dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ (planul α şi planele determinate de dreptele din α şi punctul M) .... (1p)

   Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care maximul de plane este 16 este $n = 6$, adică soluţia naturală a ecuaţiei $\dfrac{n(n-1)}{2} = 15$ .... (1p)

   (c) Trebuie să găsim o situaţie în care 6 puncte din plan determină exact 7 drepte. Ne gândim la un triunghi ABC şi la 3 ceviene AD, BE şi CF concurente în punctul G ($D \in [BC], E \in [AC]$ şi $F \in [BA]$). Cele 7 puncte determină 9 drepte. Eliminând punctul F vor rămâne 6 puncte şi 7 drepte .... (2p)

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Barem clasa a IX-a

1. i) A este robot, B poate fi orice..1p

ii) 4 situații în legătură cu D și E..1p

C este om...1p

iii) N este multiplu de 4..1p

Așezarea este 2 oameni, 2 roboți, 2 oameni 2 roboți etc...1p

iv) Dacă prima persoană este de aceeați specie cu a treia, a patra este opusă lor. Dacă prima persoană este opusă celei de-a treia, atunci a patra este la fel cu a treia.............................1p

Avem posibilitațile om, om, om, robot, robot, robot, om, om, om etc., deci N divizibil cu 6 sau om, robot, om, robot, etc., deci N divizibil cu 2..1p

2.

i) x=1, y=prim..1p

ii) Din suma lor este 4 deducem ca numerele sunt 1, 3 sau 2,2 (acest lucru l-a dedus si Andrei). Daca erau 1, 3, Cristina ar fi stiut, deci numerle sunt 2 si 2...2p

iii) Cristina vazand ca produsul este 4, isi da seama ca Andrei are 1+4=5 sau 2+2=4. Insa daca Andrei avea 4, conform ii) atunci Andrei ar fi stiut numerele. Andrei spunand “Nu stiu!”, Cristina deduce ca Andrei are 5, deci numerele sunt 1 si 4...2p

iv) Andrei vede fie 9, fie 6. Cum 6 poate fi scris ca 1+5, Andrei nu ar fi putut știi de la început răspunsul Cristinei, deci Andrei are 9. Astfel Critina reazlizează că numerele sunt 1 și 8........2p

3. Problema se poate rezolva prin tratarea a 2 cazuri:

-cazul I: n * m este par

Dacă n * m este par, atunci n sau m este par. Fără a restrânge generalitatea putem considera că n este par (avem un număr par de linii). Observăm că o astfel de tablă de șah poate fi acoperită în totalitate cu piese de domino de dimensiune 2x1, punând pe fiecare coloană câte n/2 piese. Având această acoperire în minte putem stabili următoarea strategie: Alice alege ca

prima mutare să fie efectuată de către Bob, evident Bob va plasa pionul pe o căsuță ce aparține unei piese de domino, această piesă conține o altă căsuță care încă nu a fost vizitată, iar Alice va plasa pionul la următorul pas în aceasta. Observăm că la fiecare pas Bob este în una din următoarele situații: fie nu poate muta (Alice câștigă), fie poate muta și va muta în zona unei piese de domino ale cărei căsuțe nu au fost vizitate încă (în acest caz Alice poate raspunde prin mutarea pionului în cea de a doua căsuță a zonei respective)...3p

-cazul al II-lea: n * m este impar

Dacă n * m este impar, atunci n și m sunt impare. Vom aplica o strategie asemanătoare cazului I: Alice va efectua prima mutare și va plasa pionul în colțul stânga-sus al tablei de joc, acum cele n*m-1 căsuțe pot fi acoperite cu piese de domino (plasăm pe prima coloană începând de la a doua linie (n-1)/2 piese de domino în poziție verticală, iar pe fiecare linie plasăm începând de la a doua coloană (m-1)/2 piese de domino în poziție orizontală). Observăm că Bob se poate afla în aceleași doua situații ca în cazul precedent (fie nu poate muta, fie mută în zona unei piese de domino nevizitate încă)...3p

Întrucât în ambele cazuri Alice poate raspunde la orice mutare a lui Bob și ținând cont că jocul se va termina întotdeauna după un număr finit de pași (cel mult n*m), înseamnă că Alice are mereu strategie de câștig...1p

4. a) Cum $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, notând $s_1=x+y+z$ și $s_2=xy+yz+zx$, avem $s_1^2-2s_2=1$ și $s_1(1-s_2)=1$. Rezultă $s_1^3-3s_1+2=0 \Leftrightarrow (s_1+2)(s_1-1)^2=0$. Din $x,y,z\geq 0$ rezultă $s_1\geq 0$, deci $s_1=1$, adică $x+y+z=1$...3p

b) Din $s_1^2-2s_2=1$ și $s_1=1$, rezultă $s_2=0$, adică $xy+yz+zx=0$. Dar $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$, prin urmare două din ele sunt egale cu 0. Dacă x=y=0 , ipoteza dă $z^2=1 \Rightarrow z=1$, adică avem soluția (0, 0, 1). Analog găsim soluțiile (1,0,0) și (0,1,0)…………….2p

c) Căutând o soluție de forma (a, a, b), din ipoteză:

$$2a+b=2a^2+b^2=2a^3+b^3-3a^2b=1$$

Și obținem soluția $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$..2p

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

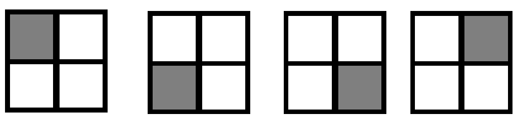
Barem clasa a X-a

1. Vom demonstra aplicând principiul inducției matematice.

P(n): O tablă de dimensiune 2^nx2^n poate fi acoperită cu piese de forma celei din figură, indiferent de căsuța aleasă pentru a rămâne neacoperită..2p

P(0): evident

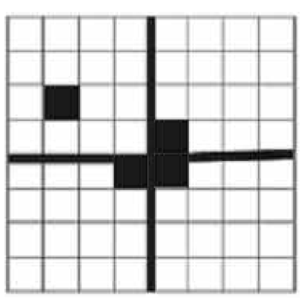
P(1): Observăm că există 4 moduri de a alege căsuța care rămâne neacoperită, iar pentru fiecare avem soluțiile următoare:



....1p

P(n) => P(n+1)

Putem împărți tabla de dimensiune 2^{n+1}în patru table de dimensiune 2^n. Căsuța ”lipsă” se va afla în unul din aceste pătrate și știm că un astfel de pătrat poate fi acoperit cu piese, iar căsuța respectivă sa fie lăsată neacoperită. Ne mai rămân 3 pătrate de latură 2^n, putem pune mereu o piesă de forma celei din figură, astfel încât aceasta să acopere câte o căsuța din fiecare pătrat, deci am redus problema la a acoperi fiecare din cele 3 pătrate, cu excepția căsuțelor alese. Următoarea imagine exemplifică această strategie:



....4p

2. i) A este robot, B poate fi orice..1p

ii) 4 situații în legătură cu D și E..1p

C este om...1p

iii) N este multiplu de 4...1p

Așezarea este 2 oameni, 2 roboți, 2 oameni 2 roboți etc...1p

iv) Dacă prima persoană este de aceeați specie cu a treia, a patra este opusă lor. Dacă prima persoană este opusă celei de-a treia, atunci a patra este la fel cu a treia.............................1p

Avem posibilitațile om, om, om, robot, robot, robot, om, om, om etc., deci N divizibil cu 6 sau om, robot, om, robot, etc., deci N divizibil cu 2...1p

3. Notam bilele cu R, R', V, V', G, G'. Punem pe un taler G si V, iar pe celalalt G' si R....................2p
Cazul 1 (balanta este echilibrata): cum G si G' au greutati diferite atunci V si R au greutati diferite. Schimbam V cu V', evident balanta nu va mai fi echilibrata. Astfel putem deduce care este mai usor dintre V si V', deci si care este bila mai usoara dintre R si R' si dintre G si G'..2p
Cazul 2 (balanta nu este echilibrata): rezolvam pentru situatia in care talerul cu G si V este mai greu (cealalta situatie fiind tratata analog), atunci G este mai greu decat G' (altfel nu am putea avea acest taler mai greu). Punem pe un taler G si G' iar pe celalalt V si R. Daca avem echilibru inseamna ca V si R au greutati diferite, singura varianta corecta fiind V greu si R usor. Daca nu avem echilibru atunci V si R au aceeasi grutate si putem observa daca sunt ambele grele sau ambele usoare. Stiind greutatile lui V si R obtinem imediat greutatile lui V' si R'...3p

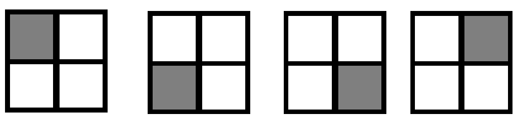
4. Presupunem că există p, q, r cu proprietatea din enunț………………………………………………………..2p
Fie d nenul rația progresiei. Atunci avem doi întregi nenuli m, n astfel încât $\sqrt{q}-\sqrt{p}=md$ și $\sqrt{r}-\sqrt{p}=nd$, deci $n(\sqrt{q}-\sqrt{p})=m(\sqrt{r}-\sqrt{p})$…………………………………………………………..2p
Rezultă că $m\sqrt{r}-n\sqrt{q}=(m-n)\sqrt{p}$, de unde $rm^2+qn^2-2mn\sqrt{rq}=p(m-n)^2$,
adică $\sqrt{rq}=\dfrac{rm^2+qn^2-p(m-n)^2}{2mn}\in\mathbb{Q}$, fals……………………………………………………………..3p

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

Barem clasa a XI-a

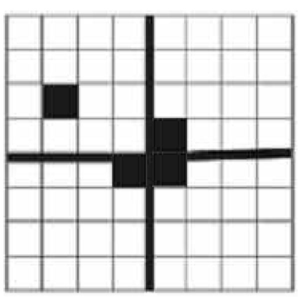
1. Vom demonstra aplicând principiul inducției matematice.
P(n): O tablă de dimensiune 2^nx2^n poate fi acoperită cu piese de forma celei din figură, indiferent de căsuța aleasă pentru a rămâne neacoperită……………………………………………………………………..2p

P(0): evident
P(1): Observăm că există 4 moduri de a alege căsuța care rămâne neacoperită, iar pentru fiecare avem soluțiile următoare:



……………………………………………………………………1p

P(n) => P(n+1)
Putem împărți tabla de dimensiune 2^{n+1} în patru table de dimensiune 2^n. Căsuța ”lipsă” se va afla în unul din aceste pătrate și știm că un astfel de pătrat poate fi acoperit cu piese, iar căsuța respectivă sa fie lăsată neacoperită. Ne mai rămân 3 pătrate de latură 2^n, putem pune mereu o piesă de forma celei din figură, astfel încât aceasta să acopere câte o căsuța din fiecare pătrat, deci am redus problema la a acoperi fiecare din cele 3 pătrate, cu excepția căsuțelor alese. Următoarea imagine exemplifică această strategie:



....3p

2. Problema se poate rezolva prin tratarea a 2 cazuri:
-cazul I: n * m este par………………………………………………………………………………………………….3p
Dacă n * m este par, atunci n sau m este par. Fără a restrânge generalitatea putem considera că n este par (avem un număr par de linii). Observăm că o astfel de tablă de șah poate fi acoperită în totalitate cu piese de domino de dimensiune 2x1, punând pe fiecare coloană câte n/2 piese. Având această acoperire în minte putem stabili următoarea strategie: Alice alege ca

prima mutare să fie efectuată de către Bob, evident Bob va plasa pionul pe o căsuță ce aparține unei piese de domino, această piesă conține o altă căsuță care încă nu a fost vizitată, iar Alice va plasa pionul la următorul pas în aceasta. Observăm că la fiecare pas Bob este în una din următoarele situații: fie nu poate muta (Alice câștigă), fie poate muta și va muta în zona unei piese de domino ale cărei căsuțe nu au fost vizitate încă (în acest caz Alice poate raspunde prin mutarea pionului în cea de a doua căsuță a zonei respective)

-cazul al II-lea: n * m este impar……………………………………………………………………………………………3p

Dacă n * m este impar, atunci n și m sunt impare. Vom aplica o strategie asemanătoare cazului I: Alice va efectua prima mutare și va plasa pionul în colțul stânga-sus al tablei de joc, acum cele n*m-1 căsuțe pot fi acoperite cu piese de domino (plasăm pe prima coloană începând de la a doua linie (n-1)/2 piese de domino în poziție verticală, iar pe fiecare linie plasăm începând de la a doua coloană (m-1)/2 piese de domino în poziție orizontală). Observăm că Bob se poate afla în aceleași doua situații ca în cazul precedent (fie nu poate muta, fie mută în zona unei piese de domino nevizitate încă).

Întrucât în ambele cazuri Alice poate raspunde la orice mutare a lui Bob și ținând cont că jocul se va termina întotdeauna după un număr finit de pași (cel mult n*m), înseamnă că Alice are mereu strategie de câștig……………………………………………………………………………………………..………..1p

3. a) Pornim dintr-un oraș oarecare și mergem pe șosele, ținând cont să nu parcurgem o șosea de două ori. Evident nu vom putea călători la infinit, așadar vom ajunge într-un oraș din care nu vom mai putea merge mai departe...1p
Acesta nu poate fi un oraș prin care am mai trecut deoarece am fi avut un ciclu în timpul călătoriei. Astfel între două orașe depe ciclu putem merge în două moduri (mergând în direcții opuse pe ciclu), ceea ce contrazice ipoteza..2p
Așadar vom ajunge în orașul final prin unica șosea adiacentă cu el. Am găsit un oraș cu o singura șosea adiacentă. Pornim din acest oraș respectând condiția de a nu parcurge o șosea de două ori. Asemănător situației inițiale, vom ajunge într-un oraș din care nu ne mai putem deplasa mai departe. Acesta din urmă este un al doilea oraș cu proprietatea că are o singură șosea adiacentă..1p
b) Aplicând punctul a) știm că avem un oraș cu o singură șosea adiacentă. Dacă am elimina orașul și șoseaua adiacentă lui, obținem un oraș cu proprietatea că putem ajunge din orice oraș în orice alt oraș într-un mod unic, mergând pe șosele, astfel încât nicio șosea să nu fie parcursă mai mult de o dată. Putem astfel găsi din nou un oraș cu o singură șosea adiacentă lui. Repetând operația de eliminare vom elimina N-1 orașe și N-1 șosele și va rămâne un singur oraș fără șosele adiacente. Așadar avem N-1 șosele în orașul inițial..2p
c) Nu. Alegem orașele din capetele șoselei închise. Dacă încă se mai poate merge între aceste două orașe, atunci inițial existau două moduri distincte de a ajunge de la un oraș la celălalt (celălalt mod fiind parcurgând șoseaua închisă), contradicție..1p

4. $x_2 = 2$ ……………………………………1p

Se demonstrează prin inducție că $x_n \le 2$ …………………………………1p

$0 \le \dfrac{x_n}{n+1} \le \dfrac{2}{n+1} \to 0$ ……………………………………..1p

de unde se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = 2^0 = 1$ ………………………………1p

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{x_n} = 2^1 = 1$ ………………………..…………1p

Pentru calculul $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$, observăm că $(n+1)(x_{n+1} - 1) = \dfrac{2^{\frac{x_n}{n+1}} - 1}{\frac{x_n}{n+1}}$, oricare ar fi $n \ge 1$….1p

Cum $\dfrac{x_n}{n+1} \to 0$ și $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} = \ln 2$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \ln 2$ ……………………..1p

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2017-2018
Ediția a III-a

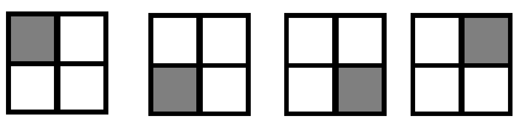
Barem clasa a XII-a

1. Vom demonstra aplicând principiul inducției matematice.

P(n): O tablă de dimensiune 2^nx2^n poate fi acoperită cu piese de forma celei din figură, indiferent de căsuța aleasă pentru a rămâne neacoperită……………………………………………………………………..2p

P(0): evident

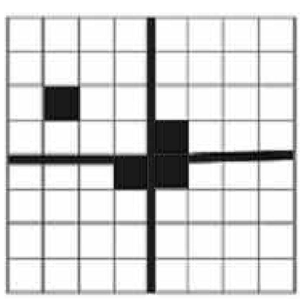
P(1): Observăm că există 4 moduri de a alege căsuța care rămâne neacoperită, iar pentru fiecare avem soluțiile următoare:



……………………………………………………………………..1p

P(n) => P(n+1)

Putem împărți tabla de dimensiune 2^{n+1} în patru table de dimensiune 2^n. Căsuța ”lipsă” se va afla în unul din aceste pătrate și știm că un astfel de pătrat poate fi acoperit cu piese, iar căsuța respectivă sa fie lăsată neacoperită. Ne mai rămân 3 pătrate de latură 2^n, putem pune mereu o piesă de forma celei din figură, astfel încât aceasta să acopere câte o căsuța din fiecare pătrat, deci am redus problema la a acoperi fiecare din cele 3 pătrate, cu excepția căsuțelor alese. Următoarea imagine exemplifică această strategie:



....3p

2. Problema se poate rezolva prin tratarea a 2 cazuri:

-cazul I: n * m este par…………………………………………………………………………………………………..3p

Dacă n * m este par, atunci n sau m este par. Fără a restrânge generalitatea putem considera că n este par (avem un număr par de linii). Observăm că o astfel de tablă de șah poate fi acoperită în totalitate cu piese de domino de dimensiune 2x1, punând pe fiecare coloană câte n/2 piese. Având această acoperire în minte putem stabili următoarea strategie: Alice alege ca

prima mutare să fie efectuată de către Bob, evident Bob va plasa pionul pe o căsuță ce aparține unei piese de domino, această piesă conține o altă căsuță care încă nu a fost vizitată, iar Alice va plasa pionul la următorul pas în aceasta. Observăm că la fiecare pas Bob este în una din următoarele situații: fie nu poate muta (Alice câștigă), fie poate muta și va muta în zona unei piese de domino ale cărei căsuțe nu au fost vizitate încă (în acest caz Alice poate raspunde prin mutarea pionului în cea de a doua căsuță a zonei respective)

-cazul al II-lea: n * m este impar…………………………………………………………………………………………3p

Dacă n * m este impar, atunci n și m sunt impare. Vom aplica o strategie asemanătoare cazului I: Alice va efectua prima mutare și va plasa pionul în colțul stânga-sus al tablei de joc, acum cele n*m-1 căsuțe pot fi acoperite cu piese de domino (plasăm pe prima coloană începând de la a doua linie (n-1)/2 piese de domino în poziție verticală, iar pe fiecare linie plasăm începând de la a doua coloană (m-1)/2 piese de domino în poziție orizontală). Observăm că Bob se poate afla în aceleași doua situații ca în cazul precedent (fie nu poate muta, fie mută în zona unei piese de domino nevizitate încă).

Întrucât în ambele cazuri Alice poate raspunde la orice mutare a lui Bob și ținând cont că jocul se va termina întotdeauna după un număr finit de pași (cel mult n*m), înseamnă că Alice are mereu strategie de câștig……………………………………………………………………………………………..1p

3.

a) Pornim dintr-un oraș oarecare și mergem pe șosele, ținând cont să nu parcurgem o șosea de două ori. Evident nu vom putea călători la infinit, așadar vom ajunge într-un oraș din care nu vom mai putea merge mai departe..1p
Acesta nu poate fi un oraș prin care am mai trecut deoarece am fi avut un ciclu în timpul călătoriei. Astfel între două orașe depe ciclu putem merge în două moduri (mergând în direcții opuse pe ciclu), ceea ce contrazice ipoteza...2p
Așadar vom ajunge în orașul final prin unica șosea adiacentă cu el. Am găsit un oraș cu o singura șosea adiacentă. Pornim din acest oraș respectând condiția de a nu parcurge o șosea de două ori. Asemănător situației inițiale, vom ajunge într-un oraș din care nu ne mai putem deplasa mai departe. Acesta din urmă este un al doilea oraș cu proprietatea că are o singură șosea adiacentă..1p

b) Aplicând punctul a) știm că avem un oraș cu o singură șosea adiacentă. Dacă am elimina orașul și șoseaua adiacentă lui, obținem un oraș cu proprietatea că putem ajunge din orice oraș în orice alt oraș într-un mod unic, mergând pe șosele, astfel încât nicio șosea să nu fie parcursă mai mult de o dată. Putem astfel găsi din nou un oraș cu o singură șosea adiacentă lui. Repetând operația de eliminare vom elimina N-1 orașe și N-1 șosele și va rămâne un singur oraș fără șosele adiacente. Așadar avem N-1 șosele în orașul inițial...2p

c) Nu. Alegem orașele din capetele șoselei închise. Dacă încă se mai poate merge între aceste două orașe, atunci inițial existau două moduri distincte de a ajunge de la un oraș la celălalt (celălalt mod fiind parcurgând șoseaua închisă), contradicție...1p

4. Fie $x \in \mathbb{R}$ și șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel $x_0 = x$ și $x_{n+1} = \sin x_n$ ……………………………1p

Cum $x_n \in [-1,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $n \geq 1$ ……………………………………1p

și funcția sin este crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton și fiind mărginit este convergent ……………………………………2p

Din $x_n \to l$, atunci $\sin l = l$, deci $l = 0$ …………………………1p

Cum $f(x) = f(\sin x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ deduce că $f(x_n) = f(\sin x_n) = f(x_{n+1})$, deci $(f(x_n))_n$ este constant …………………………1p

Cum f este continua și $x_n \to 0$, rezultă că $f(x) = f(x_0) = f(x_n) \to f(0)$, deci $f(x) = f(0)$ …….1p

Rezultă că f este constantă și condiția $f\,'(k) = 0$ este îndeplinită …………………1p