Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a V-a – enunţuri

Problema 1. Pe o insulă există două tipuri de oameni: oameni sinceri, cei care spun întotdeauna adevărul şi mincinoşi, cei care mint tot timpul. Andra şi Bogdan, locuitori ai acelei insule, fac următoarele afirmaţii:

Andra: Amândoi suntem sinceri.

Bogdan: Andra e mincinoasă sau eu sunt mincinos.

Ce fel de oameni sunt Andra şi Bogdan? Argumentaţi!

Problema 2. Pe o masă sunt 21 de pahare cu suc dintre care 7 sunt pline, 7 sunt pe jumătate pline şi 7 sunt goale. Trei copii doresc să împartă paharele astfel încât fiecare să aibă acelaşi număr de pahare şi aceeaşi cantitate de suc. Este posibil acest lucru? (Nu au voie să mute suc dintr-un pahar în altul şi nici să golească vreun pahar).

Problema 3. Pe malul unui râu se află trei oameni, o maimuţă mare şi două maimuţe mici. Ei vor să traverseze râul, având la dispoziţie o barcă cu două locuri. Barca poate fi condusă de oricare om şi de maimuţa mare. În orice moment, pe oricare dintre maluri, numărul oamenilor trebuie să fie mai mare sau egal decât al maimuţelor. (de exemplu, dacă pe un mal este o maimuţă, atunci nu poate sosi barca cu un om şi o maimuţă). Pot trece toţi pe malul celălalt? Explicaţi!

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a VI-a – enunţuri

Problema 1. Pe o insulă există două tipuri de oameni: oameni sinceri, cei care spun întotdeauna adevărul şi mincinoşi, cei care mint tot timpul. Trei copii de pe insulă, Andra, Bogdan şi Corina, fac următoarele afirmaţii:

Andra: Exact doi dintre noi suntem sinceri.

Bogdan: Eu şi Corina suntem sinceri.

Corina: Andra e mincinoasă sau Bogdan este mincinos.

Putem preciza ce fel de persoană este Andra? Explicaţi!

Problema 2. Un om de afaceri are trei cuburi pe biroul său. Pe fiecare faţă a fiecărui cub se află câte o literă. În fiecare lună el aranjează cuburile astfel încat pe feţele aflate deasupra să apară câte o literă, cele trei constituind abrevierea lunii în care se află. Acestea sunt: IAN, FEB, MAR, APR, MAI, IUN, IUL, AUG, SPT, OCT, NOI, DEC. Ce litere trebuie să conţină fiecare cub?

Problema 3. Pe o insulă trăiesc oameni şi extratereştri. Oamenii normali spun întotdeauna adevărul, iar oamenii anormali mint întotdeauna. Extratereştrii normali mint întotdeauna, iar cei anormali spun întotdeauna adevărul. Oamenii şi extratereştrii nu pot fi deosebiţi după aspect.

a) Care dintre următoarele afirmaţii nu poate fi făcută de un extraterestru normal?

- Sunt un extraterestru anormal.
- Sunt un om anormal.
- Sunt un om normal.
- Sunt un extraterestru normal.

b) Întâlneşti un locuitor al insulei care afirmă: Sunt un extraterestru normal. Poţi spune din ce categorie face parte acesta?

c) Întâlneşti doi locuitori ai insulei, Adriana şi Bianca. Ele afirmă:

Adriana: Sunt normală.

Bianca: Adriana e anormală.

Adriana: Bianca e om.

Poţi decide dacă Bianca e normală sau anormală?

Justificaţi fiecare cerinţă!

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a VII-a – enunţuri

Problema 1. Există două tipuri de oameni: oameni sinceri, cei care spun întotdeauna adevărul şi mincinoşi, cei care mint tot timpul. Andra, Bogdan, Corina şi Dan sunt oameni şi fac următoarele afirmaţii:

Andra: Bogdan e sincer sau eu sunt sinceră.

Bogdan: Corina e sinceră sau eu sunt sincer.

Corina: Dan e sincer sau eu sunt sinceră.

Dan: Andra e sinceră sau eu sunt sincer.

Ştiind că cel puţin unul dintre ei minte, aflaţi numărul exact de mincinoşi. Argumentaţi!

Problema 2. La un turneu de fotbal participă 87 de echipe. În primul rund se fac perechi de câte două echipe şi cele două echipe din aceeaşi pereche dispută un meci. Fiecare echipă care pierde este eliminată iar cele rămase sunt iarăşi împărţite în perechi etc. Echipa care nu joacă într-o rundă nu este eliminată, ci trece în runda următoare. Câte meciuri trebuie disputate pentru a se stabili echipa câştigătoare? Explicaţi!

Problema 3. Două surori, Ilinca şi Lucia, îşi propun să facă sport în perioada vacanţei. Considerăm că fiecare zi a vacanţei este fie însorită, fie ploioasă.

Ilinca face sport în ziua a k-a a vacanţei atâtea minute câte zile însorite au fost în primele k zile ale vacanţei.

Lucia nu face sport în zilele însorite, dar în zilele ploioase face sport atâtea minute câte zile au trecut de la începutul vacanţei (inclusiv ziua în care se află).

a) Dacă vacanţa are 30 de zile, dintre care 15 însorite şi 15 ploioase, care ar fi înşiruirea de zile însorite şi ploioase pentru ca Ilinca să facă cât mai mult sport? Dar ca să facă cât mai puţin? Precizaţi numărul de minute de sport pe care le face Ilinca în fiecare caz.

b) Arătaţi că în cele două cazuri de la punctul a) Lucia face sport un număr de minute egal cu Ilinca.

c) Să presupunem că într-o succesiune de zile însorite şi ploioase schimbăm o zi ploioasă cu ziua însorită care-i urmează (cele două zile sunt consecutive). Cum se modifică numărul minutelor de sport ale Ilincăi când facem schimbul? Dar ale Luciei?

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a VIII-a – enunţuri

Problema 1. Două surori, Ilinca şi Lucia, îşi propun să facă sport în perioada vacanţei. Considerăm că fiecare zi a vacanţei este fie însorită, fie ploioasă.

Ilinca face sport în ziua a k-a a vacanţei atâtea minute câte zile însorite au fost în primele k zile ale vacanţei.

Lucia nu face sport în zilele însorite, dar în zilele ploioase face sport atâtea minute câte zile au trecut de la începutul vacanţei (inclusiv ziua în care se află).

a) Dacă vacanţa are 30 de zile, dintre care 15 însorite şi 15 ploioase, care ar fi înşiruirea de zile însorite şi ploioase pentru ca Ilinca să facă cât mai mult sport? Dar ca să facă cât mai puţin? Precizaţi numărul de minute de sport pe care le face Ilinca în fiecare caz.

b) Arătaţi că în cele două cazuri de la punctul a) Lucia face sport un număr de minute egal cu Ilinca.

c) Să presupunem că într-o succesiune de zile însorite şi ploioase schimbăm o zi ploioasă cu ziua însorită care-i urmează (cele două zile sunt consecutive). Cum se modifică numărul minutelor de sport ale Ilincăi când facem schimbul? Dar ale Luciei?

Problema 2. Doi fraţi aveau împreună o galerie de artă, având număr egal de acţiuni în cadrul acesteia. Din cauza problemelor economice au decis să vândă tablourile. Pentru fiecare tablou au obţinut o sumă de bani egală cu numărul tablourilor. Cu această sumă au cumpărat cărţi, preţul fiecărei cărţi fiind 10 lei. Odată ce au cumpărat cât de multe cărţi puteau, au cumpărat un caiet din restul banilor.

Cei doi fraţi au un număr par de obiecte cumpărate, pe care le împart în mod egal. Fratele care a primit caietul vrea o sumă de bani de la celălalt pentru a egaliza valorile.

Ce sumă trebuie să primească fratele care a cumpărat caietul?

Problema 3. Pe o masă sunt 1000 de monede, dintre care exact 20 sunt cu pajura deasupra. Un copil legat la ochi trebuie să separe monedele în două mulţimi, nu neapărat cu număr egal de elemente, astfel încât în fiecare mulţime să fie număr egal de monede cu pajura în sus. Ştiind că acel copil poate răsturna oricare monede şi că nu poate deosebi prin pipăit feţele monedei, descrieţi cum poate separa monedele.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a IX-a – enunţuri

Problema 1. Pe o masă avem n monede, $1 \leq n \leq 900$. Doi copii iau pe rând una, trei sau şase monede (fiecare copil are libertatea de a alege câte monede ia de câte ori îi vine rândul). Câştigă copilul care ia ultima monedă de pe masă. Aflaţi numărul de valori ale lui n pentru care primul copil are strategie câştigătoare.

Problema 2. Alex are 12 monede, iar Bianca are 13 monede. Cei doi copii aruncă toate monedele şi numără câte pajuri i-au picat fiecăruia. Care e probabilitatea ca Alex să aibă un număr cel puţin egal de pajuri cu al Biancăi? (pajură= una dintre feţele monedei)

Problema 3. Avem 8 saci cu câte 48 de diamante. Cinci saci conţin numai diamante autentice, iar trei saci conţin numai diamante false, fiecare fiind mai uşor cu 1 gram faţă de cele autentice. Având la dispoziţie un cântar, aflaţi dintr-o singură cântărire care sunt sacii cu diamante false.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a X-a – enunţuri

Problema 1. Doi fraţi aveau împreună o galerie de artă, având număr egal de acţiuni în cadrul acesteia. Din cauza problemelor economice au decis să vândă tablourile. Pentru fiecare tablou au obţinut o sumă de bani egală cu numărul tablourilor. Cu această sumă au cumpărat cărţi, preţul fiecărei cărţi fiind 10 lei. Odată ce au cumpărat cât de multe cărţi puteau, au cumpărat un caiet din restul banilor.

Cei doi fraţi au un număr par de obiecte cumpărate, pe care le împart în mod egal. Fratele care a primit caietul vrea o sumă de bani de la celălalt pentru a egaliza valorile.

Ce sumă trebuie să primească fratele care a cumpărat caietul?

Problema 2. Pe o masă avem n monede, $1 \leq n \leq 900$. Doi copii iau pe rând una, trei sau şase monede (fiecare copil are libertatea de a alege câte monede ia de câte ori îi vine rândul). Câştigă copilul care ia ultima monedă de pe masă. Aflaţi numărul de valori ale lui n pentru care primul copil are strategie câştigătoare.

Problema 3. O persoană aruncă la primul pas două zaruri şi le face suma. Apoi repetă procedeul de mai multe ori. Doi copii care privesc afirmă:

Copilul 1: Mai întâi va apărea suma 12.

Copilul 2: Mai întâi va apărea suma 7 de două ori consecutiv.

Care copil are mai multe şanse de câştig ştiind că se repetă aruncările până când unul dintre copii câştigă.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a XI-a – enunţuri

Problema 1. O persoană aruncă la primul pas două zaruri şi le face suma. Apoi repetă procedeul de mai multe ori. Doi copii care privesc afirmă:

Copilul 1: Mai întâi va apărea suma 12.

Copilul 2: Mai întâi va apărea suma 7 de două ori consecutiv.

Care copil are mai multe şanse de câştig ştiind că se repetă aruncările până când unul dintre copii câştigă.

Problema 2. În pauză, un profesor trece prin clase şi împarte creioane elevilor pe care îi găseşte în bănci. Fie $f(n,k)$ numărul de moduri în care profesorul împarte n creioane celor k elevi pe care îi găseşte în bancă. De exemplu $f(2,2)=3$, deoarece cele două creioane le poate da celor doi copii Mara şi Ion în trei feluri: Marei două, sau lui Ion două, sau Marei unul şi lui Ion unul.

a) Aflaţi $f(1,k)$, $k \geq 1$.

b) Aflaţi $f(n,1)$.

c) Arătaţi că $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n,k-1)$.

d) Calculaţi $f(7;5)$.

e) La un moment dat, profesorul se gândeşte că ar trebui să dea cel puţin câte un creion fiecărui copil. Fie $g(n,k)$ numărul de moduri de distribuire a creioanelor în acest caz. Aflaţi $g(7,5)$.

Problema 3. Avem 8 saci cu câte 48 de diamante. Cinci saci conţin numai diamante autentice, iar trei saci conţin numai diamante false, fiecare fiind mai uşor cu 1 gram faţă de cele autentice. Având la dispoziţie un cântar, aflaţi dintr-o singură cântărire care sunt sacii cu diamante false.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a XII-a – enunţuri

Problema 1. O persoană aruncă la primul pas două zaruri şi le face suma. Apoi repetă procedeul de mai multe ori. Doi copii care privesc afirmă:

Copilul 1: Mai întâi va apărea suma 12.

Copilul 2: Mai întâi va apărea suma 7 de două ori consecutiv.

Care copil are mai multe şanse de câştig ştiind că se repetă aruncările până când unul dintre copii câştigă.

Problema 2. În pauză, un profesor trece prin clase şi împarte creioane elevilor pe care îi găseşte în bănci. Fie $f(n, k)$ numărul de moduri în care profesorul împarte n creioane celor k elevi pe care îi găseşte în bancă. De exemplu $f(2, 2) = 3$, deoarece cele două creioane le poate da celor doi copii Mara şi Ion în trei feluri: Marei două, sau lui Ion două, sau Marei unul şi lui Ion unul.

a) Aflaţi $f(1, k)$, $k \geq 1$.

b) Aflaţi $f(n, 1)$.

c) Arătaţi că $f(n, k) = f(n-1, k) + f(n, k-1)$.

d) Calculaţi $f(7; 5)$.

e) La un moment dat, profesorul se gândeşte că ar trebui să dea cel puţin câte un creion fiecărui copil. Fie $g(n, k)$ numărul de moduri de distribuire a creioanelor în acest caz. Aflaţi $g(7, 5)$.

Problema 3. Avem 8 saci cu câte 48 de diamante. Cinci saci conţin numai diamante autentice, iar trei saci conţin numai diamante false, fiecare fiind mai uşor cu 1 gram faţă de cele autentice. Având la dispoziţie un cântar, aflaţi dintr-o singură cântărire care sunt sacii cu diamante false.

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.