Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a V-a – barem

Problema 1.
Caz 1. Andra e sinceră. Atunci şi Bogdan e sincer. Contradicţie! 2p
Caz 2. Andra minte. Dacă Bogdan ar minţi, ambii ar fi sinceri. Fals. 3p
Concluzie: Andra minte, Bogdan spune adevărul. 2p

Problema 2.

Copil 1: 3 pline	1 jumătate	3 goale;	
Copil 2: 3 pline	1 jumătate	3 goale;	
Copil 3: 1 pline	5 jumătate	1 gol.	.... 7p

Problema 3.
Notăm oamenii cu A, B, C , maimuţa mare cu M şi maimuţele mici cu m_1 şi m_2.
I. Trec M şi m_1. Se întoarce M.
II. Trec M şi m_2. Se întoarce M.
III. Trec A şi B. Se întorc A şi m_1.
IV. Trec A şi M. Se întorc A şi m_2.
V. Trec A şi C. Se întoarce M.
VI. Trec M şi m_1. Se întoarce M.
VII. Trec M şi m_2.
Orice rezolvare corectă 7p

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a VI-a – barem

Problema 1.
Caz I
Bogdan spune adevărul 1p
Atunci Corina spune adevărul, deci Andra minte. Contradicţie 2p
Caz II
Bogdan minte, atunci Corina spune adevărul 1p
Situaţia 1: Andra spune adevărul. Nu avem contradicţie 1p
Situaţia 2: Andra minte. Nu avem contradicţie 1p
Nu se poate preciza. 1p

Problema 2.
Abrevierile lunilor conţin 17 litere diferite. Cuburile au în total 18 feţe, atunci o literă se repetă 2p
Primul cub: I, G, R, T, D, B.
Al doilea cub: A, U, M, O, S, E.
Al treile cub: N, L, A, P, C, F.
Orice aşezare corectă 5p

Problema 3.
a) Explică de ce poate face primele 3 afirmaţii 1p
A patra afirmaţie este adevărată, dar un extraterestru normal minte întotdeauna, rezultă nu o poate face 1p
b) Caz I Extraterestru
Dacă este un extraterestru normal, înseamnă că minte întotdeauna. Dar afirmaţia ar fi adevărată. Contradicţie. Dacă este un extraterestru anormal, înseamnă că spune întotdeauna adevărul, dar afirmaţia e falsă. Contradicţie 1p
Caz II Om
Dacă este normal, spune întotdeauna adevărul. Dar afirmaţia este falsă. Contradicţie. Rezultă este un om anormal 1p
c) Caz I Adriana spune adevărul, deci Bianca e om, iar Adriana e normală. Înseamnă că Bianca minte când spune că Adriana e anormală, deci Bianca e un om anormal ... 1p
Caz II Adriana minte, deci e anormală, iar Bianca e extraterestru. Dar Bianca spune adevărul şi e extraterestru, deci e anormală 1p
Răspuns: Bianca e anormală 1p

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a VII-a – barem

Problema 1.

Presupunem, fără a afecta generalitatea, că Andra este cea care minte 2p

Înseamnă că nici ea, nici Bogdan nu sunt sinceri 2p

Analog se arată că nici Corina, nici Dan nu sunt sinceri 2p

Sunt 4 mincinoşi 1p

Problema 2. La fiecare meci jucat, o echipă şi numai una este eliminată din turneu. 3p

Pentru a fi desemnată o câştigătoare, trebuie să fie eliminate 86 de echipe. 3p

Aşadar se dispută 86 de meciuri. 1p

Problema 3.

a) Ilinca face cele mai multe minute de sport dacă primele 15 zile din vacanţă este însorit.

În aceste zile ea face: $1 + 2 + 3 + ... + 15 = \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 120$ minute 1p

Următoarele zile sunt ploioase, deci numărul de minute e acelaşi în fiecare zi (15): $15 \cdot 15 = 225$ minute 1p

Maxim $120 + 225 = 345$ minute.

Face cele mai puţine minute de sport dacă zilele însorite sunt la final:

$15 \cdot 0 + 1 + 2 + ... + 15 = \dfrac{15 \cdot 16}{2} = 120$ minute 1p

b) Caz I

Lucia face sport doar în ultimele 15 zile.

$16 + 17 + 18 + ... + 30 = 345$ minute 1p

Caz II

Lucia face sport doar în primele 15 zile.

$1 + 2 + ... + 15 = 120$ minute 1p

c) Dacă ziua ploiasă k este schimbată cu ziua însorită k+1, Ilinca va face a+1 şi a+1 minute în loc de a şi a+1.

Numărul de minute făcute în zilele dinaintea şi de după zilele acestea două nu se modifică.

Deci Ilinca va face cu un minut în plus 1p

Lucia va face în ziua ploioasă t+1 în loc de t, deci numărul total de minute creşte tot cu 1 .... 1p

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a VIII-a – barem

Problema 1.

a) Ilinca face cele mai multe minute de sport dacă primele 15 zile din vacanţă este însorit.

În aceste zile ea face: $1 + 2 + 3 + ... + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ minute 1p

Următoarele zile sunt ploioase, deci numărul de minute e acelaşi în fiecare zi (15): $15 \cdot 15 = 225$ minute 1p

Maxim $120 + 225 = 345$ minute.

Face cele mai puţine minute de sport dacă zilele însorite sunt la final:

$15 \cdot 0 + 1 + 2 + ... + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ minute 1p

b) Caz I

Lucia face sport doar în ultimele 15 zile.

$16 + 17 + 18 + ... + 30 = 345$ minute 1p

Caz II

Lucia face sport doar în primele 15 zile.

$1 + 2 + ... + 15 = 120$ minute 1p

c) Dacă ziua ploiasă k este schimbată cu ziua însorită k+1, Ilinca va face a+1 şi a+1 minute în loc de a şi a+1.

Numărul de minute făcute în zilele dinaintea şi de după zilele acestea două nu se modifică.

Deci Ilinca va face cu un minut în plus 1p

Lucia va face în ziua ploioasă t+1 în loc de t, deci numărul total de minute creşte tot cu 1 . . . . 1p

Problema 2.

Din vânzarea a celor k tablouri încasează k^2 lei 1p

$k^2 : 10 = 2n - 1 \,\mathrm{rest}\, a$, $0 < a < 10$, a preţul caietului 2p

Aşadar $k^2 = M_{20} + r$, unde $11 \leq r \leq 19$ 2p

Singura posibilitate este $r = 16$, deci $a = 6$ 1p

Răspuns: 2 lei 1p

Problema 3.

Copilul separă 20 de monede la întâmplare din cele 1000 . . . . 3p

Considerăm că sunt k monede cu marca în sus printre cele 12 luate. $(0 \leq k \leq 20)$. Pe masă au mai rămas 20-k monede cu marca în sus 2p

Întoarcem monedele alese, deci acum avem 20-k monede cu marca în sus, la fel ca pe masă 2p

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a IX-a – barem

Problema 1.

Verificăm pentru primele numere naturale şi le punem asterisc celor pentru care primul pierde.

1 2^* 3 4^* 5 6 7 8 9^* 10 11^* 12 13^* 2p

Grupăm numerele în grupe de câte 9 şi demonstrăm inductiv că, în cadrul fiecărei grupe, numerele pentru care primul câştigă ocupă aceeaşi poziţie.

Arătăm că, dacă o grupă cu numere de la 9k+1 la 9k+9 respectă regula, şi următoarea grupă, cu numere la 9(k+1)+1 la 9(k+2), respectă regula.

9k+1 $(9k+2)^*$ 9k+3 $(9k+4)^*$ 9k+5 9k+6 9k+7 9k+8 $(9k+9)^*$ 9k+10 $(9k+11)^*$ 9k+12 $(9k+13)^*$ 9k+14 9k+15 9k+16 9k+17 $(9(k+2))^*$ 2p

Pentru N = 9k+10.

Dacă primul ia o monedă, cel de-al doilea ajunge în situaţia în care era primul pentru N = 9k+9, rezultă primul câştigă

N = 9k+11

Subcazul 1: Primul ia o monedă, rezultă al doilea rămâne în situaţia în care ar începe de la N = 9k+10, rezultă câştigă.

Subcazul 2: Primul ia 3 monede, rezută al doilea rămâne în situaţia în care ar începe de la N = 9k+8, rezultă al doilea câştigă. 1p

Verificăm pentru toate celelalte şi constatăm că în 6 situaţii câştigă primul. 1p

$\frac{900}{9}\cdot 6 = 600$ 1p

Primul are strategie de câştig pentru 600 de numere. 2p

Problema 2.

Deoarece Bianca are cu o monedă mai mult, aceasta va avea întotdeauna mai multe pajuri decât Alex, ori mai multe capete decât Alex. (niciodată ambele) 2p

De asemenea, fiecărui caz în care Bianca are mai multe capete decât Alex îi corespunde un caz simetric în care Bianca are mai multe pajuri decât Alex 3p

Înseamnă că există probabilitatea de $\frac{1}{2}$ ca Bianca să obţină mai multe pajuri decât Alex 1p

Probabilitatea ca Alex să aibă cel puţin la fel de multe pajuri ca Bianca e de $\frac{1}{2}$ .. 1p

Problema 3.

Alegem din fiecare sac un număr de monede pe care să le luăm, astfel încât orice sumă de trei să fie unică 2p

Astfel, luăm în ordine 0 din prima, 1 din a doua, 2, 4, 7, 13, 24 şi 44 din ultima ..3p

Punem cele 95 de monede pe cântar. Diferenţa dintre ce ar fi trebuit să arate cântarul şi ce arată de fapt, indică numărul de monede false pe care le-am pus.

Astfel ne dăm seama ce saci conţin monede false 2p

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a X-a – barem

Problema 1. Fie n numărul de tablouri. Cei doi obţin n^2 lei din vânzarea tablourilor. 1p

$n^2 = 10(2x-1) + y$, unde $2x-1$ este numărul de cărţi, iar y preţul caietului, $y < 10$. 2p

$n^2 = 20(x-1) + 10 + y$, adică $n^2 = M_{20} + (10+y)$, $10 < 10 + y < 20$. 2p

Singura posibilitate este $y = 6$. 1p

Aşadar fratele care are caietul trebuie să primească 2 lei. 1p

Problema 2. Verificăm pentru primele numere naturale şi le punem asterisc celor pentru care primul pierde.

1 2* 3 4* 5 6 7 8 9* 10 11* 12 13* 2p

Grupăm numerele în grupe de câte 9 şi demonstrăm inductiv că, în cadrul fiecărei grupe, numerele pentru care primul câştigă ocupă aceeaşi poziţie.

Arătăm că, dacă o grupă cu numere de la 9k+1 la 9k+9 respectă regula, şi următoarea grupă, cu numere la 9(k+1)+1 la 9(k+2), respectă regula.

9k+1 $(9k+2)^*$ 9k+3 $(9k+4)^*$ 9k+5 9k+6 9k+7 9k+8 $(9k+9)^*$ 9k+10 $(9k+11)^*$ 9k+12 $(9k+13)^*$ 9k+14 9k+15 9k+16 9k+17 $(9(k+2))^*$ 2p

Pentru N = 9k+10.

Dacă primul ia o monedă, cel de-al doilea ajunge în situaţia în care era primul pentru N = 9k+9, rezultă primul câştigă

N = 9k+11

Subcazul 1: Primul ia o monedă, rezultă al doilea rămâne în situaţia în care ar începe de la N = 9k+10, rezultă câştigă.

Subcazul 2: Primul ia 3 monede, rezută al doilea rămâne în situaţia în care ar începe de la N = 9k+8, rezultă al doilea câştigă. 1p

Verificăm pentru toate celelalte şi constatăm că în 6 situaţii câştigă primul. 1p

$\frac{900}{9} \cdot 6 = 600$ 1p

Primul are strategie de câştig pentru 600 de numere. 2p

Problema 3.

<u>Caz I</u>: Probabilitatea să pice 12 din prima este de $\frac{1}{36}$, caz în care primul câştigă. . 1p

<u>Caz II</u>: Prima dată suma e 7.

<u>S1</u> A două dată suma e 12. Probabilitatea e $\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216}$.

În acest caz câştigă primul.

<u>S2</u> A doua dată suma e tot 7. Probabilitatea e $\frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$.

În acest caz câştigă al doilea.

<u>S3</u> A doua dată suma nu e nici 12, nici 7. Probabilitatea e $\frac{6}{36} \cdot \frac{36-(1+6)}{36} = \frac{29}{216}$.

În acest caz se continuă jocul. 3p

Caz III: Prima dată suma nu e nici 7, nici 12. Probabilitatea este: $\dfrac{36-(1+6)}{36}=\dfrac{29}{216}$.

1p

În acest caz nu câştigă niciunul, deci se continuă jocul.
Notăm cu P probabilitatea ca primul să câştige.
$P=\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{216}+\dfrac{29}{216}\cdot P+\dfrac{29}{36}\cdot P$ deci $P=\dfrac{7}{16}$....................................2p

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a XI-a – barem

Problema 1. Caz I: Probabilitatea să pice 12 din prima este de $\dfrac{1}{36}$, caz în care primul câştigă. 1p

Caz II: Prima dată suma e 7.

S1 A două dată suma e 12. Probabilitatea e $\dfrac{6}{36}\cdot\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{216}$.

În acest caz câştigă primul.

S2 A doua dată suma e tot 7. Probabilitatea e $\dfrac{6}{36}\cdot\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{36}$.

În acest caz câştigă al doilea.

S3 A doua dată suma nu e nici 12, nici 7. Probabilitatea e $\dfrac{6}{36}\cdot\dfrac{36-(1+6)}{36}=\dfrac{29}{216}$.

În acest caz se continuă jocul. 3p

Caz III: Prima dată suma nu e nici 7, nici 12. Probabilitatea este: $\dfrac{36-(1+6)}{36}=\dfrac{29}{216}$. 1p

În acest caz nu câştigă niciunul, deci se continuă jocul.

Notăm cu P probabilitatea ca primul să câştige.

$P=\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{216}+\dfrac{29}{216}\cdot P+\dfrac{29}{36}\cdot P$ deci $P=\dfrac{7}{16}$. 2p

Problema 2.

a) $f(1,k)=k$. 1p

b) $f(n,1)=1$. 1p

c) Alegând la întâmplare un copil, acesta fie primeşte un creion iar celelalte $n-1$ sunt împărţite celor k copii (inclusiv lui), fie nu primeşte niciun creion, deci cele n creioane sunt împărţite la $k-1$ copii. Concluzia! 2p

d)

n	$g(n,1)$	$g(n,2)$	$g(n,3)$	$g(n,4)$	$g(n,5)$
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70
5	1	6	21	56	126
6	1	7	28	84	210
7	1	8	36	120	330

$g(7,5)=330$.

După ce fiecare copil a primit câte un creion, profesorul mai are de împărţit două creioane celor 5 copii. $g(7,5)=f(2,5)=15$. 3p

Problema 3. Alegem din fiecare sac un număr de monede pe care să le luăm, astfel încât orice sumă de trei să fie unică 2p

Astfel, luăm în ordine 0 din prima, 1 din a doua, 2, 4, 7, 13, 24 şi 44 din ultima . . 3p

Punem cele 95 de monede pe cântar. Diferenţa dintre ce ar fi trebuit să arate cântarul şi ce arată de fapt, indică numărul de monede false pe care le-am pus.

Astfel ne dăm seama ce saci conţin monede false 2p

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Concursul Pro-Performanţa

Ediţia a VI-a, 28 noiembrie 2020

CLASA a XII-a – barem

Problema 1. <u>Caz I</u>: Probabilitatea să pice 12 din prima este de $\frac{1}{36}$, caz în care primul câştigă. 1p

<u>Caz II</u>: Prima dată suma e 7.

<u>S1</u> A două dată suma e 12. Probabilitatea e $\frac{6}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216}$.

În acest caz câştigă primul.

<u>S2</u> A doua dată suma e tot 7. Probabilitatea e $\frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$.

În acest caz câştigă al doilea.

<u>S3</u> A doua dată suma nu e nici 12, nici 7. Probabilitatea e $\frac{6}{36} \cdot \frac{36-(1+6)}{36} = \frac{29}{216}$.

În acest caz se continuă jocul. 3p

<u>Caz III</u>: Prima dată suma nu e nici 7, nici 12. Probabilitatea este: $\frac{36-(1+6)}{36} = \frac{29}{216}$.
1p

În acest caz nu câştigă niciunul, deci se continuă jocul.

Notăm cu P probabilitatea ca primul să câştige.

$P = \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \frac{29}{216} \cdot P + \frac{29}{36} \cdot P$ deci $P = \frac{7}{16}$ 2p

Problema 2.

a) $f(1, k) = k$. 1p

b) $f(n, 1) = 1$. 1p

c) Alegând la întâmplare un copil, acesta fie primeşte un creion iar celelalte $n-1$ sunt împărţite celor k copii (inclusiv lui), fie nu primeşte niciun creion, deci cele n creioane sunt împărţite la $k-1$ copii. Concluzia! 2p

d)

n	$g(n,1)$	$g(n,2)$	$g(n,3)$	$g(n,4)$	$g(n,5)$
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70
5	1	6	21	56	126
6	1	7	28	84	210
7	1	8	36	120	330

$g(7, 5) = 330$.

După ce fiecare copil a primit câte un creion, profesorul mai are de împărţit două creioane celor 5 copii. $g(7, 5) = f(2, 5) = 15$. 3p

Problema 3. Alegem din fiecare sac un număr de monede pe care să le luăm, astfel încât orice sumă de trei să fie unică 2p

Astfel, luăm în ordine 0 din prima, 1 din a doua, 2, 4, 7, 13, 24 şi 44 din ultima ..3p

Punem cele 95 de monede pe cântar. Diferenţa dintre ce ar fi trebuit să arate cântarul şi ce arată de fapt, indică numărul de monede false pe care le-am pus.

Astfel ne dăm seama ce saci conţin monede false 2p

Timp de lucru 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.