Concursul Pro-Performanţa

Barem Clasa a IX-a

22 January 2016

1. Fie heptagonul ABCDEFG. Cel puţin patru vârfuri au numere de aceeaşi paritate.(2p)
Să zicem că sunt patru pare. Două dintre acestea vor fi alăturate. Fie ele A şi B. (2p)
Dacă unul dintre vârfurile C, E, G este par, avem concluzia. (1p)
În caz contrar, $\triangle CEG$ este cel căutat. (1p)

2. Îmărţim cele 38 de scaune în 9 grupe de câte patru scaune consecutive, şi una de două. În cele 9 grupe se află cel puţin 28 de persoane, deci va exista o grupă de 4 scaune cu patru persoane. (6p)

3. O linie nu poate tăia un număr impar de dominouri (ar despărţi tabla în două părţi cu număr impar de pătrăţele fiecare). (2p)

Prin reducere la absurd, ar trebui ca fiecare dintre cele 10 linii posibile, să taie cel puţin câte două dominouri (adică cel puţin 20, deoarece două linii diferite nu pot tăia acelaşi domino). (3p)

Dar sunt 18 dominouri. Contradicţie. (1p)

4. Presupunem că nu există un astfel de x. Atunci dacă îi dăm lui x, pe rând, valorile y, $2y$, $3y$, respectiv $4y$, $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, în fiecare grupă $a+x$, $b+x$, $c+x$ va exista câte un număr raţional; adică, în total, cel puţin patru numere raţionale. (3p)

Dacă le grupăm : $\{a+y; a+2y; a+3y; a+4y\}$, $\{b+y; b+2y; b+3y; b+4y\}$, $\{c+y; c+2y; c+3y; c+4y\}$, una dintre mulţimi va conţine cel puţin două numere raţionale, deci diferenţa raţională, contradicţie. (3p)

5. Căutăm numere în progresie aritmetică. Fie $a = b - r$ şi $c = b + r$, $r \in \mathbb{Z}$. (2p)
Atunci $b = \dfrac{2r^3+2}{3}$. (2p)

Pentru fiecare r de forma $r = M_3 + 2$ găsim câte o soluţie. (2p)

6. Cu notaţiile obişnuite avem $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{c}{b}$, de unde $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$. (1p)
$\dfrac{BI}{IN} = \dfrac{a+c}{b}$, de unde $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$. (2p)

b) Folosind punctul anterior şi calcule, obtinem:

$$\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}. \qquad (2p)$$

Deducem $b^2 = ac$ şi $c^2 = ab$, de unde concluzia. (1p)