

Concursul Pro-Performanța

Barem Clasa a X-a

1. Fie heptagonul ABCDEFG. Cel puțin patru vârfuri au numere de aceeași paritate. (2p)

Să zicem că sunt patru pare. Două dintre acestea vor fi alăturate. Fie ele A și B. (2p)

Dacă unul dintre vârfurile C, E, G este par, avem concluzia. (1p)

În caz contrar, $\triangle CEG$ este cel căutat. (1p)

2. Îmărțim cele 38 de scaune în 9 grupe de câte patru scaune consecutive, și una de două. În cele 9 grupe se află cel puțin 28 de persoane, deci va exista o grupă de 4 scaune cu patru persoane. (6p)

3. O linie nu poate tăia un număr impar de dominouri (ar despărți tabla în două părți cu număr impar de pătrățele fiecare). (2p)

Prin reducere la absurd, ar trebui ca fiecare dintre cele 10 linii posibile, să taie cel puțin câte două dominouri (adică cel puțin 20, deoarece două linii diferite nu pot tăia același domino). (3p)

Dar sunt 18 dominouri. Contradicție. (1p)

4. Presupunem că nu există un astfel de x . Atunci dacă îi dăm lui x , pe rând, valorile $y, 2y, 3y$, respectiv $4y, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, în fiecare grupă $a + x, b + x, c + x$ va exista câte un număr rațional; adică, în total, cel puțin patru numere raționale. (3p)

Dacă le grupăm : $\{a+y; a+2y; a+3y; a+4y\}, \{b+y; b+2y; b+3y; b+4y\}, \{c+y; c+2y; c+3y; c+4y\}$, una dintre mulțimi va conține cel puțin două numere raționale, deci diferența rațională, contradicție. (3p)

5. Căutăm numere în progresie aritmetică. Fie $a = b - r$ și $c = b + r, r \in \mathbb{Z}$. (2p)

Atunci $b = \frac{2r^3 + 2}{3}$. (2p)

Pentru fiecare r de forma $r = M_3 + 2$ găsim câte o soluție. (2p)

6. Cu notațiile obișnuite avem $\frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}$, de unde $\overrightarrow{AM} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}$. (1p)

$\frac{BI}{IN} = \frac{a+c}{b}$, de unde $\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$. (2p)

b) Folosind punctul anterior și calcule, obținem:

$$\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}. \quad (2p)$$

Deducem $b^2 = ac$ și $c^2 = ab$, de unde concluzia. (1p)