

**Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2016-2017
Ediția a II-a**

Clasa a V-a

1. Alina, Bogdan și Cătălin sunt cunoscuți ca foarte buni logicieni.

i) Regele pune pe capul fiecăruia câte un fes. Fiecare logician poate vedea fesurile celorlalți doi, dar nu pe cel propriu. Regele spune: "Fiecare dintre voi are fes alb sau negru, dar nu toți aceeași culoare."

Toți patru sunt onești și au încredere unul în altul.

Regele o întreabă pe Alina: "Ce culoare are fesul tău?"

Alina spune: "Este alb."

Ce culoare au fesurile celorlalți doi?

ii) Regele le așează pe cap alte fesuri și le spune: "Aveți pe cap fesuri albe sau negre, dar nu toate de aceeași culoare."

Apoi întreabă: "Alina, știi ce culoare are fesul tău?" Alina spune: "Nu!"

Va ști acum Bogdan ce culoare are fesul său?

iii) Regele schimbă iarăși fesurile și spune: "Fiecare aveți fesuri albe sau negre. Cel puțin unul are fes alb. Voi știți ce culoare are fesul propriu?"

Toți răspund în același timp: "Nu!"

Ce putem deduce despre culoarea fesurilor lor?

2. Trei persoane **A**, **B** și **C** sunt cunoscute ca fiind experte în logică. Persoanele **A**, **B** și **C** spun întotdeauna adevărul.

i) **C** scrie câte un număr natural nenul pe fruntea persoanelor **A** și **B** și spune:

„ Fiecare dintre numerele voastre este cel puțin 1. Diferența numerelor este 1”.

A spune: „ Știu numărul meu!”

Ce număr are fiecare?

ii) **C** șterge numerele anterioare, scrie alte numere naturale pe frunțile lor și spune: „Fiecare dintre cele două numere este cuprins între 1 și 10 inclusiv. Diferența între cele două numere este 1. Numărul lui **A** este prim.”

A spune: „ Nu știu numărul meu!”

Apoi **B** spune: „Nu știu numărul meu!”

Care este numărul lui **A**?

3. i) Cardurile cu numerele 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3 sunt dispuse într-un șir în ordinea indicată. Este permis să alegem câteva carduri alăturate (consecutive) și să le rearanjăm în ordine inversă.

Este posibil să obținem ordinea 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 după patru astfel de operații?

ii) Într-un sac avem 24 kg de făină. Putem separa 15 kg de făină folosind numai o balanță cu două talere?

4. Într-o livadă sunt meri, peri și nuci. Numărul merilor este cel mai mare, iar numărul nucilor este cel mai mic. Știind că dacă împărțim numărul merilor, numărul perilor și numărul nucilor la 11 obținem de fiecare dată câtul de trei ori mai mic decât restul, aflați câți pomi sunt în livadă. (G.M. 10/2016)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

Timp de lucru două ore.

SUCCES!

**Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2016-2017
Ediția a II-a**

Clasa a VI-a

1. Alina, Bogdan și Cătălin sunt cunoscuți ca foarte buni logicieni.

i) Regele pune pe capul fiecăruia câte un fes. Fiecare logician poate vedea fesurile celorlalți doi, dar nu pe cel propriu.

Regele spune: "Fiecare dintre voi are fes alb sau negru, dar nu toți aceeași culoare."

Toți patru sunt onești și au încredere unul în altul.

Regele o întreabă pe Alina: "Ce culoare are fesul tău?"

Alina spune: "Este alb."

Ce culoare au fesurile celorlalți doi?

ii) Regele le așează pe cap alte fesuri și le spune: "Aveți pe cap fesuri albe sau negre, dar nu toate de aceeași culoare." Apoi întreabă: "Alina, știi ce culoare are fesul tău?" Alina spune: "Nu!"

Va ști acum Bogdan ce culoare are fesul său?

iii) Regele schimbă iarăși fesurile și spune: "Fiecare aveți fesuri albe sau negre. Cel puțin unul are fes alb. Voi știți ce culoare are fesul propriu?"

Toți răspund în același timp: "Nu!"

Ce putem deduce despre culoarea fesurilor lor?

iv) Regele continuă (vezi punctul iii) și întreabă a doua oară: „Dar acum știți ce culoare are propriul fes?”

Toți răspund simultan: Alina:-„Nu”, Bogdan și Cătălin-„Da”.

Ce culoare are fesul fiecăruia?

2. Sunt 20 de copii. Fiecare are 3, 6 sau 9 monede. Numărul copiilor care au 3 monede este egal cu numărul copiilor care au 9 monede. Câte monede au copiii în total?

3. i) În jurul unei mese rotunde sunt așezate 2017 persoane. Fiecare dintre aceste persoane este sau mincinoasă, sau spune adevărul. Știm că fiecare persoana afirmă:

„Persoana din stânga mea este mincinoasă iar persoana din dreapta mea spune adevărul.”

Aflați câte persoane mincinoase sunt la masă.

ii) Într-un sac avem 24 kg de făină. Putem separa 15 kg folosind numai o balanță cu două talere?

4. Fie O un punct în plan. Se consideră toate semidreptele cu originea în O , care se colorează cu roșu sau negru (toate punctele unei semidrepte fiind colorate cu aceeași culoare). Arătați că există trei semidrepte $[OA, [OB, [OC$ colorate cu aceeași culoare astfel încât $[OB$ să fie bisectoarea unghiului AOC . (G.M. 11/2015)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

SUCCES!

Timp de lucru două ore.

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
Ediția a II-a, ianuarie 2017
Clasa a VII-a

1. Patru caracatițe de culori diferite (negru, roșu, galben și verde) se întâlnesc. Caracatițele pot avea 6, 7 sau 8 tentacule. Caracatițele cu 7 tentacule mint mereu iar cele cu 6 sau 8 tentacule spun mereu adevărul. Caracatița neagră spune că suma tentaculilor lor este 28, cea galbenă spune că suma este 26, cea roșie spune că suma este 25 iar cea verde spune că suma este 27.

- (a) Să se arate că nu mint toate caracatițele.
(b) Să se arate că există o singură caracatiță care spune adevărul.
(c) Care este caracatița care spune adevărul?

2. Domnul și doamna T au cinci copii: Andrei, Bianca, Cosmin, Dan și Emil, având vârstele de 18, 17, 16, 15 și 14 ani (nu neapărat în această ordine). Fiecare din cei cinci copii are o culoare favorită (albastru, verde, galben, portocaliu și roșu) nu neapărat în această ordine. Orice doi copii au culori favorite diferite. Se știe că:

Emil este mai mic decât Andrei, unuia dintre ei plăcându-i culoarea galben.

Copilului de 17 ani îi place culoarea albastru și are un frate mai mare, pe Cosmin.

Între Bianca și cel căruia îi place portocaliul este o diferență de doi ani.

Dan este cu un an mai mare decât cel care iubește roșul, care la rândul lui este cu un an mai mare decât cel care iubește verdele.

Care este culoarea favorită a lui Andrei?

3. La un concurs de alergări participă 25 de copii. Pista pe care se desfășoară concursul are doar 5 culoare, așa încât la o cursă pot participa simultan doar 5 copii. Arbitrul a uitat cronometrul acasă așa încât el nu va putea cronometra timpii parcurși de copii. Se știe că oricare doi copii aleargă cu viteze diferite.

- (a) Care este numărul minim de curse necesare pentru a desemna pe cel mai rapid copil?
(b) Care este numărul minim de curse necesare pentru a desemna pe cei mai rapizi 3 copii?

4. Fie ABC un triunghi isoscel cu $m(\angle A) = 120^\circ$. Fie AD , ($D \in (BC)$) înălțimea din A a triunghiului ABC iar M mijlocul segmentului (AC) . Fie MN perpendiculara din M pe BC , ($N \in BC$) iar P intersecția dreptelor MN și AB . Să se arate că patrulaterul $ADMP$ este romb.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

Timp de lucru 2 ore.

Concursul interjudețean de matematică

PRO-PERFORMANȚA

2016-2017

Ediția a II-a

Clasa a VIII-a

1. Datele unui calendar sunt scrise sub forma:

$$z_1 z_2 / l_1 l_2 / a_1 a_2 a_3 a_4$$

în ordinea zi/lună/an.

Numim date fără repetiție datele ce nu conțin cifre care se repetă. De exemplu data 23/05/1967 este fără repetiție, pe când 07/12/1974 nu este o astfel de dată!

Vom folosi calendarul Gregorian (cel care este folosit și la noi în țară, vezi mai jos!)

- i) Arătați că anii de la 2000 la 2099 nu conțin date fără repetiție.
- ii) Care este ultima dată fără repetiție de până azi?
- iii) Care va fi următoarea dată fără repetiție?

Notă: a) Calendarul Gregorian are 12 luni, care au, respectiv, 31, 28 sau 29, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30 și 31 de zile. Luna februarie are 28 zile în anii nedivizibili cu 4 sau în cei divizibili cu 100 dar nu cu 400 (cum ar fi 1900); în ceilalți ani are 29 zile.

2. Se numește „Pro-cuvânt” un șir de litere a și b , construit astfel încât să respecte următoarele reguli:

I. Un șir fără nicio literă este un „Pro-cuvânt”.

II. Dacă un șir oarecare de litere, notat W , este un „Pro-cuvânt”, atunci șirul aWb este un „Pro-cuvânt”.

(De exemplu dacă $aabb$, notat W , este un „Pro-cuvânt”, atunci și $aaabbb$ este un „Pro-cuvânt”.)

III. Dacă șirurile U și V sunt „Pro-cuvinte”, atunci șirul U urmat de șirul V , adică UV , este un „Pro-cuvânt”.

Toate „Pro-cuvintele” sunt formate folosind cele trei reguli (I, II și III).

Lungimea unui „Pro-cuvânt” este numărul literelor care îl compun.

- i) Arătați că orice „Pro-cuvânt” are lungime pară.
- ii) Scrieți toate „Pro-cuvintele” de lungime șase.
- iii) Fie W un „Pro-cuvânt”. Numărul aparițiilor literei a este egal cu numărul aparițiilor literei b ?

3. Într-o urnă se află 74 bile. Trei copii A , B și C iau pe rând bile din urnă (în ordinea A , B , C , A , B , C , A , ...). Fiecare poate extrage, la alegere două, trei sau patru bile, dar nu pot extrage tot atâtea câte a extras cel de dinaintea sa. (De exemplu, dacă B a extras 3 bile la un moment dat, C nu poate extrage tot 3 bile la mutarea următoare).

Pierde primul care nu mai poate lua bile, ceilalți doi fiind câștigători.

Are C strategie câștigătoare?

4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Punctul M este mijlocul înălțimii VO , punctul N este mijlocul segmentului BM , iar $P \in [AO]$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$. Demonstrați că $PN \perp (VDC)$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat. **SUCCES!**

Timp de lucru două ore.

**Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2016-2017
Ediția a II-a**

Clasa a IX-a

1. Datele unui calendar sunt scrise sub forma:

$$z_1 z_2 / l_1 l_2 / a_1 a_2 a_3 a_4$$

în ordinea zi/lună/an.

Numim date fără repetiție datele ce nu conțin cifre care se repetă. De exemplu data 23/05/1967 este fără repetiție, pe când 07/12/1974 nu este o astfel de dată!

Vom folosi calendarul Gregorian (cel care este folosit și la noi în țară, vezi mai jos!)

- i) Arătați că anii de la 2000 la 2099 nu conțin date fără repetiție.
- ii) Care este ultima dată fără repetiție de până azi?
- iii) Care va fi următoarea dată fără repetiție?

Notă: a) Calendarul Gregorian are 12 luni, care au, respectiv, 31, 28 sau 29, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30 și 31 de zile. Luna februarie are 28 zile în anii nedivizibili cu 4 sau în cei divizibili cu 100 dar nu cu 400 (cum ar fi 1900); în ceilalți ani are 29 zile.

2. Ana (A), Bogdan (B) și Cristina (C) au primit câte un plic în care se află o hârtie pe care este scris un număr natural nenul. Cei trei prieteni știu că suma celor trei numere este 14, dar nu știu numerele celorlalte doi. În ordinea A, B, C ei spun:

Ana: B și C au numere diferite.

Bogdan: Dacă eram primul aș fi spus că A și C au numere diferite, dar așa știu că toți avem numere diferite.

Cristina: Acum știu numerele lui A și B. Care sunt cele trei numere?

3. Într-o țară orice două orașe sunt legate printr-o cale ferată sau o șosea dar nu prin amândouă. Să se arate că se poate călători de la orice oraș la orice alt oraș doar pe șosea fără a trece prin mai mult de două alte orașe sau se poate călători de la orice oraș la orice alt oraș doar pe calea ferată fără a trece prin mai mult de două alte orașe.

4. Să se arate că nu există pătrate perfecte de forma $n(9n + 2012)$, $n \in \mathbb{N}^*$. (G.M. 9/2012)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

Timp de lucru două ore.

SUCCES!

**Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2016-2017
Ediția a II-a**

Clasa a X-a

1. Ana (A), Bogdan (B) și Cristina (C) au primit câte un plic în care se află o hârtie pe care este scris un număr natural nenul. Cei trei prieteni știu că suma celor trei numere este 14, dar nu știu numerele celorlalte doi. În ordinea A, B, C ei spun:
Ana: B și C au numere diferite.
Bogdan: Dacă eram primul aș fi spus că A și C au numere diferite, dar așa știu că toți avem numere diferite.
Cristina: Acum știu numerele lui A și B. Care sunt cele trei numere?

2. Se numește „Pro-cuvânt” un șir de litere a și b , construit astfel încât să respecte următoarele reguli:

I. Un șir fără nicio literă este un „Pro-cuvânt”.

II. Dacă un șir oarecare de litere, notat W , este un „Pro-cuvânt”, atunci șirul aWb este un „Pro-cuvânt”. (De exemplu dacă $aabb$, notat W , este un „Pro-cuvânt”, atunci și $aaabbb$ este un „Pro-cuvânt”.)

III. Dacă șirurile U și V sunt „Pro-cuvinte”, atunci șirul U urmat de șirul V , adică UV , este un „Pro-cuvânt”. Toate „Pro-cuvintele” sunt formate folosind cele trei reguli (I, II și III).

Lungimea unui „Pro-cuvânt” este numărul literelor care îl compun.

- i) Arătați că orice „Pro-cuvânt” are lungime pară.
- ii) Scrieți toate „Pro-cuvintele” de lungime șase.
- iii) Fie W un „Pro-cuvânt”. Numărul aparițiilor literei a este egal cu numărul aparițiilor literei b ?
- iv) Să se arate că orice „Pro-cuvânt” poate fi scris sub forma $aPbQ$, unde P și Q sunt „Pro-cuvinte”.
3. i) Într-o urnă sunt 4 bile: două roșii, una verde și una galbenă. Cineva extrage la întâmplare două bile o dată și anunță: „Cel puțin una dintre ele este roșie”. Care este probabilitatea ca și cealaltă bilă extrasă să fie tot roșie?

ii) Într-o urnă se află 74 bile. Trei copii A , B și C iau pe rând bile din urnă. Fiecare poate extrage, la alegere, 2, 3 sau 4 bile, dar nu pot extrage tot atâtea câte a extras ce de dinaintea sa. (De exemplu, dacă B a extras 3 bile la un moment dat, C nu poate extrage tot 3 bile la mutarea următoare.)

Pierde primul care nu mai poate lua bile, ceilalți doi fiind câștigători.

Are C strategie câștigătoare?

4. Fie numerele complexe și distincte a , b și c astfel încât:

$$(a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3.$$

Sa se arate ca $a^3 = b^3 = c^3$. (G.M. 9/2012)

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare răspuns trebuie explicat. Timp de lucru două ore. Succes!

Concursul interjudețean de matematică
PRO-PERFORMANȚA
2016-2017
Ediția a II-a

Clasa a XI-a

1. Trei persoane A , B și C sunt cunoscute ca fiind experte în logică. Persoanele A , B și C spun întotdeauna adevărul.

i) C scrie câte un număr natural nenul pe fruntea persoanelor A și B și spune:

„ Fiecare dintre numerele voastre este cel puțin 1. Diferența numerelor este 1”.

A spune: „ Știu numărul meu!”

Ce număr are fiecare?

ii) C șterge numerele anterioare, scrie alte numere naturale pe frunțile lor și spune: „Fiecare dintre cele două numere este cuprins între 1 și 10 inclusiv. Diferența între cele două numere este 1. Numărul lui A este prim.”

A spune: „ Nu știu numărul meu!”

Apoi B spune: „Nu știu numărul meu!”

Care este numărul lui A ?

iii) C șterge din nou numerele, scrie alte numere și le spune: „Fiecare are un număr cuprins între 1 și 10 inclusiv. Diferența lor este 1.”

A spune: „Nu știu numărul meu. Este el pătrat perfect?”

C spune: „Dacă ți-aș spune ți-ai da seama ce număr e.”

B spune: „Nu știu numărul meu!”

Ce număr are A ?

2. Într-o țară orice două orașe sunt legate printr-o cale ferată sau o șosea dar nu prin amândouă. Să se arate că se poate călători de la orice oraș la orice alt oraș doar pe șosea fără a trece prin mai mult de două alte orașe sau se poate călători de la orice oraș la orice alt oraș doar pe calea ferată fără a trece prin mai mult de două alte orașe.

3. i) Într-o urnă sunt 4 bile: două roșii, una verde și una galbenă. Cineva extrage la întâmplare două bile și anunță că una dintre ele este roșie. Care este probabilitatea ca și cealaltă bilă extrasă să fie tot roșie?

ii) Într-o urnă se află 74 bile. Trei copii A , B și C iau pe rând bile din urnă. Fiecare poate extrage, la alegere, 2, 3 sau 4 bile, dar nu pot extrage tot atâtea câte a extras ce de dinaintea sa. (De exemplu, dacă B a extras 3 bile la un moment dat, C nu poate extrage tot 3 bile la mutarea următoare.)

Pierde primul care nu mai poate lua bile, ceilalți doi fiind câștigători.

Are C strategie câștigătoare?

4. Fie A și B două matrice distincte din $M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $B^2 = BA$. Este matricea $AB + B^2$ inversabilă? (G.M. 5/2013)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

SUCCES

Timp de lucru două ore.

Concursul interjudețean de matematică

PRO-PERFORMANȚA

2016-2017

Ediția a II-a

Clasa a XII-a

1. Trei persoane A , B și C sunt cunoscute ca fiind experte în logică. Persoanele A , B și C spun întotdeauna adevărul.

i) C scrie câte un număr natural nenul pe fruntea persoanelor A și B și spune:

„ Fiecare dintre numerele voastre este cel puțin 1. Diferența numerelor este 1”.

A spune: „ Știu numărul meu!”

Ce număr are fiecare?

ii) C șterge numerele anterioare, scrie alte numere naturale pe frunțile lor și spune: „Fiecare dintre cele două numere este cuprins între 1 și 10 inclusiv. Diferența între cele două numere este 1. Numărul lui A este prim.”

A spune: „ Nu știu numărul meu!”

Apoi B spune: „Nu știu numărul meu!”

Care este numărul lui A ?

iii) C șterge din nou numerele, scrie alte numere și le spune: „Fiecare are un număr cuprins între 1 și 10 inclusiv. Diferența lor este 1.”

A spune: „Nu știu numărul meu. Este el pătrat perfect?”

C spune: „Dacă ți-aș spune ți-ai da seama ce număr e.”

B spune: „Nu știu numărul meu!”

Ce număr are A ?

2. Într-o țară orice două orașe sunt legate printr-o cale ferată sau o șosea dar nu prin amândouă.

Să se arate că se poate călători de la orice oraș la orice alt oraș doar pe șosea fără a trece prin mai mult de două alte orașe sau se poate călători de la orice oraș la orice alt oraș doar pe calea ferată fără a trece prin mai mult de două alte orașe.

3. i) Într-o urnă sunt 4 bile: două roșii, una verde și una galbenă. Cineva extrage la întâmplare două bile și anunță că una dintre ele este roșie. Care este probabilitatea ca și cealaltă bilă extrasă să fie tot roșie?

ii) Într-o urnă se află 74 bile. Trei copii A , B și C iau pe rând bile din urnă. Fiecare poate extrage, la alegere, 2, 3 sau 4 bile, dar nu pot extrage tot atâtea câte a extras ce de dinaintea sa. (De exemplu, dacă B a extras 3 bile la un moment dat, C nu poate extrage tot 3 bile la mutarea următoare.)

Pierde primul care nu mai poate lua bile, ceilalți doi fiind câștigători.

Are C strategie câștigătoare?

4. Să se arate că
$$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2+1} dx = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx .$$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare răspuns trebuie explicat.

Timp de lucru două ore.

SUCCESI